

Exercice 1 :(6 points)

I. Soit g la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par $h(x) = x \cdot \sin x + \cos x - 1$.

- 1.) Dresser le tableau de variation de h .
- 2.) En déduire le signe de $h(x)$ pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

II. Soit f la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = 2 \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1.) a. Montrer que f continue en 0.
- b. Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.
- c. Ecrire une équation de la tangente T à (C_f) au point d'abscisse 0.
- d. Etudier la parité de f .

2.) a. Montrer que pour tout $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \setminus \{0\}$ on a : $f'(x) = \frac{2h(x)}{x^2}$

b. Dresser le tableau de variation de f .

3.) Tracer (C_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) . (unité : 3cm).

Exercice 2 :(4,5points)

Soit la suite réelle $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

On considère la suite réelle $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $x_n = u_{n+1} - u_n ; \forall n \in \mathbb{N}$

- 1.) Prouver que (x_n) est une suite géométrique.
- 2.) Déterminer la limite de x_n quand n tend vers $+\infty$.

3.) On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} x_k$. Exprimer S_n en fonction de n .

4.) Profiter de 3.) pour exprimer u_n en fonction de n .

5.) a. Calculer en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$; $P_n = \prod_{i=0}^{n-1} x_i = x_0 \cdot x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_{n-1}$

b. La suite (P_n) est-elle convergente ? Si oui calculer sa limite.



Exercice 3 : (5,5 points)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $S = \{M(x, y, z) \in \xi: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

On considère les points $A(-2; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$ et $C(0; 0; -1)$

- 1.) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R
- 2.) a. Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
b. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est $x - 2y + 2z + 2 = 0$
- 3.) a. Montrer que Les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires.
b. Calculer le volume V du tétraèdre ΩABC .
c. Calculer l'aire du triangle ABC . En déduire la distance du point Ω au plan (ABC) .
d. En déduire que l'intersection de la sphère S et le plan (ABC) est un cercle dont on précisera le centre E et le rayon r .
- 4.) Soit $M(a, b, -1)$ un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est : $(a - 1)x + (b + 2)y + z - a + 2b + 3 = 0$.
a. Montrer que M appartient à Q .
b. Montrer que S et Q sont tangents en M .

Exercice 4 : (4 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on considère les nombres :

$$a_n = 2 \times 10^n + 1 \quad \text{et} \quad b_n = 2 \times 10^n - 1$$

- 1.) Montrer que par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, a_n est divisible par 3.
- 2.) a. Le nombre b_3 est-il composé ? Justifier votre réponse.
b. Justifier que le nombre $2^{1998} - 1$ est divisible par b_3 .
- 3.) a. Montrer que $a_n \wedge b_n = b_n \wedge 2$.
b. Déduire que a_n et b_n sont premiers entre eux.
- 4.) Déterminer tous les entiers naturels x et y tels que : $a_3(x - 2) = b_3(y - 3)$.

Bon Travail
Bonnes Vacances

