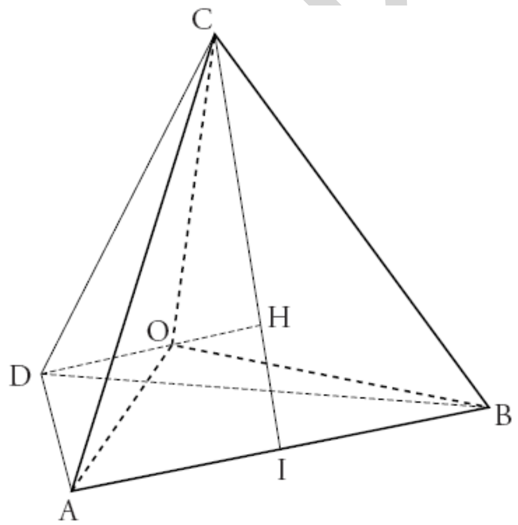
Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de contrôle n° 3** Mathématiques	Niveau : 3 ème Math
Date : 03 / 05 / 2014	Prof : MEDDEB Tarek	Durée : 2 heures

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : *(7 pts)*

Soit $OABC$ un tétraèdre tel que :



- OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.
- $OA = OB = OC = a$, où a est un réel strictement positif.

On appelle I le pied de la hauteur issue de C du triangle ABC, H le pied de la hauteur issue de O du triangle OIC et D le point de l'espace défini par : $\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD}$.

1) Quelle est la nature du triangle ABC ? justifier la réponse.
2) $a/$ Calculer $\overrightarrow{OC}.\overrightarrow{AB}$.

   $b/$ En déduire que les droites (OH) et (AB) sont orthogonales.

   $c/$ Montrer alors que : $\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{AC} = 0$, puis montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.
3) $a/$ Calculer le volume V du tétraèdre $OABC$, puis l'aire S du triangle ABC.

   $b/$ Exprimer OH en fonction de V et S, en déduire que $OH = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.
4) L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OA}\ ;\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OB}\ ;\ \frac{1}{a}\overrightarrow{OC}\right)$.

   $a/$ En remarquant que H est le centre de gravité du triangle ABC, montrer que H a pour coordonnées $\left(\frac{a}{3}\ ;\ \frac{a}{3}\ ;\ \frac{a}{3}\right)$.

   $b/$ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier (c'est-à-dire que toutes ses arêtes sont isométriques).

Exercice n°2 : *(7 pts)*

On considère les suites (U_n) et (V_n) définis sur IN par :

$U_0 = 1$, $V_0 = 2$ et pour tout $n \in IN$, $U_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2}$ et $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1} + V_n}{2}$.

1) Calculer V_1.

2) On pose, pour tout $n \in IN$, $W_n = V_n - U_n$.

Montrer que (W_n) est une suite géométrique, puis exprimer W_n en fonction de n.

3) $a/$ Montrer que la suite (U_n) est croissante et que (V_n) est décroissante.

$b/$ En déduire que (U_n) et (V_n) sont bornées.

$c/$ Montrer que : si (U_n) et (V_n) sont convergentes, alors elles convergent vers la même limite.

4) On pose, pour tout $n \in IN$, $S_n = \sum_{k=0}^{n} W_k$.

Déterminer l'expression de S_n en fonction de n, puis calculer $\lim_{n} S_n$.

5) $a/$ Exprimer W_n en fonction de U_n et U_{n-1}.

$b/$ En déduire que : $S_n = \frac{1}{2}(1+U_n)$, pour tout $n \in IN$.

$c/$ Montrer alors que (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Exercice n°3 : *(6 pts)*

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies sur IN par : $x_0 = 1$, $y_0 = 8$ et

Pour tout $n \in IN$, $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{7}{3}x_n + \frac{1}{3}y_n + 1 \\ y_{n+1} = \frac{20}{3}x_n + \frac{8}{3}y_n + 5 \end{cases}$

1) $a/$ Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, on a : $5x_n - y_n + 3 = 0$.

$b/$ En déduire que : $x_{n+1} = 4x_n + 2$.

2) Montrer par récurrence, que pour tout $n \in IN$, x_n est un entier naturel.

En déduire que y_n est aussi est un entier naturel.

3) Montrer que :

$a/$ x_n est divisible par 3 si, et seulement si, y_n est divisible par 3.

$b/$ Si x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3, alors ils sont premiers entre eux.

4) On pose $z_n = x_n + \frac{2}{3}$ pour tout $n \in IN$.

$a/$ Montrer que (z_n) est une suite géométrique de raison 4.

$b/$ Exprimer z_n puis x_n en fonction de n.

$c/$ En déduire que : $4^n \times 5 - 2$ est un multiple de 3, pour tout $n \in IN$.