Mathématiques	Devoir de Synthèse N° 3 :

3ème Maths : M2 Date : le 30 / 05 / 2009	Durée : 3heures Coefficient : 4	Enseignant : M. Ghaddab Lassad

Exercice N°1 : *(4 points)*

Le tableau suivant donne la distance de freinage Y (en mètres) d'une voiture en fonction de sa vitesse X (en Km/h)

X(km/h)	30	40	50	60	70	80
Y(en mètres)	42	60	81	90	97	110

1) a – Représenter le nuage de points de la série double (X,Y) dans un repère orthogonal du plan.
   b – Déterminer et placer le point moyen G de ce nuage
   c – Calculer $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.
2) a – Déterminer les coordonnées des point moyen G_1 du nuage des points $M_1(x_1,y_1)$, $M_2(x_2,y_2)$ et $M_3(x_3,y_3)$
   Déterminer les coordonnées du point moyen G_2 du nuage M_4 , M_5 et M_6.

   b – En déduire une équation de la droite d'ajustement linéaire D de Y en fonction de X
   c– Calculer la distance de freinage lorsque la voiture roule à 100 km/h

3) La vitesse de la voiture est de 140 km/ h , lorsque le conducteur , roulant suivant une ligne droite aperçoit un obstacle situé à une distance de 200 mètres .
Pourrait-il, alors, éviter cet obstacle sachant qu'il met une seconde pour appuyer sur les freines ?

Exercice N°2 : *(4 points)*

Une boite contient six jetons indiscernables au toucher et répartis comme suit :

- 2 jetons **blancs** marqués : -1, 0
- 4 jetons **noirs** marqués : $-1,-1,1,0$

I – On tire simultanément et au hasard **trois jetons** de la boite.
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Obtenir un seul jeton blanc »
B : « Obtenir un seul jeton marqué -1»
C : « Obtenir un seul jeton blanc ou un seul jeton marqué -1»

II – On effectue maintenant **quatre tirages successifs** d'un jeton **sans remise**
Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

F : « Obtenir une seule fois un jeton blanc»
E : « Obtenir un jeton blanc uniquement au quatrième tirage»

III – n étant un entier naturel non nul .
On effectue n **tirages successifs** d'un jeton **avec remise**.

Soit l'événement :
E_n : « Obtenir au cours de ces tirages un jeton blanc uniquement au dernier tirage»
On désigne par p_n la probabilité de l'événement E_n .

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $p_n = \frac{1}{3}.\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

2) Soit $S_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$.
   a – Calculer S_n en fonction de n .
   b – En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

__Exercice N°3:__ (5 points)
Dans l'espace $\mathcal{E}$ rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On considère les points $A(1,1,0)$; $B(1,0,1)$ et $C(0,1,1)$.

1) a – Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b – Donner une équation cartésienne du plan P contenant A, B et C .

2) a – Vérifier que $OABC$ est un tétraèdre.
   b – Déterminer le volume du tétraèdre $OABC$.

3) Soit la droite Δ passant par O et perpendiculaire à P .
   a – Déterminer une représentation de la droite Δ puis les coordonnées du point d'intersection O' de Δ et P .
   b – Prouver que O' est le centre de gravité du triangle ABC .

4) Montrer qu'une équation cartésienne du plan médiateur Q du segment $[OA]$ est :
$x + y - 1 = 0$.

5) Soit $t \in [0, \pi]$.
   On considère S l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que : $x^2 + y^2 + z^2 - (2Cost)x - y - z = 0$.
   a – Montrer que, pour tout $t \in [0, \pi]$, S est une sphère dont on déterminera le centre I et le rayon R en fonction de t.
   b – Déterminer la valeur de t pour que la sphère S soit tangente à P.
   c – On prend $t = \frac{\pi}{3}$.
   Montrer que S et P sont sécants suivant un cercle dont on précisera le centre H et le rayon r.

Exercice N°4: (7 points)

I – On considère une fonction f définie sur IR par $f(x)=\dfrac{1+x}{\sqrt{3+x^2}}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$

1) a – Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{-\infty} f$ .Que peut on déduire pour la courbe C_f

   b – Montrer que : $1-f(x)=\dfrac{2(1-x)}{\sqrt{3+x^2}\left(\sqrt{3+x^2}+(1+x)\right)}$

   c– En déduire la position relative de C_f par rapport à la droite $\Delta : y=1$

2) a – Montrer que f est dérivable sur IR et que $f'(x)=\dfrac{3-x}{(3+x^2)\sqrt{3+x^2}}$

   b – Dresser le tableau de variation de f .

3) a – Tracer dans le même repère, la courbe C_f et la droite $D: y=x$.

   b – Résoudre graphiquement l'inéquation : $f(x)\geq x$.

II – On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0=0 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$

1) Montrer que, pour tout $n\in IN$ on a $0\leq U_n\leq 1$

2) a – Montrer que (U_n) est une suite croissante.

   b – En déduire que (U_n) est convergente.

3) a – Montrer que pour tout $x\in[0,1]$ on a $\sqrt{x^2+3}\left(\sqrt{x^2+3}+(1+x)\right)\geq 4$

   b – En déduire que pour tout $n\in IN$ on a $0\leq 1-U_{n+1}\leq \dfrac{1-U_n}{2}$

4) a – Montrer par récurrence que pour tout $n\in IN$ on a $0\leq 1-U_n\leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

   b – En déduire la limite de (U_n)

5) On pose $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}U_k=U_0+U_1+U_2+U_3+....+U_{n-1}$

   a – Calculer en fonction de n la somme $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$

   b – Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $n-2\left(1-\dfrac{1}{2^n}\right)\leq S_n\leq n$

   c – En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$