

Exercice 1(3points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule réponse proposée est exacte.

L'élève indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie

Aucune justification n'est demandée.

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$;

1) Si A et B deux points distincts de ξ alors L'ensemble des points M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$ est :

- a) le cercle de diamètre [AB]
- b) La sphère de diamètre [AB]
- c) La droite (AB)

2) Soit S la sphère de centre O et de rayon 2

Alors l'intersection de S et le plan dont une équation cartésienne est : $2x - 3y + z = 0$

- a) L'ensemble vide
- b) Le point O
- c) Le cercle de centre O et de rayon 2

3) Pour Tout entier naturel n ; on pose $u_n = 2^n + 3^n$.

Alors u_n est divisible par 5

- a) Pour Tout entier naturel n
- b) Pour Tout entier naturel n pair
- c) Pour Tout entier naturel n impair

Exercice 2(5points)

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Soit $S = \{M(x, y, z) \in \xi; x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0\}$

On considère les points A(-2 ; 0 ; 0), B(0 ; 1 ; 0) et C(0 ; 0 ; -1)

1) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R

2) a) Calculer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire qu'une équation cartésienne de plan (ABC) est $x - 2y + 2z + 2 = 0$

3) a) Montrer que Les points A, B, C et Ω ne sont pas coplanaires

b) Calculer le volume v du tétraèdre ΩABC

c) Calculer l'aire du triangle ABC, en déduire la distance de point Ω au plan (ABC)

En déduire l'intersection de la sphère S et le plan (ABC) est un cercle dont on précisera le centre E et le rayon r

3) Soit $M(a, b, -1)$ un point de la sphère S où a et b sont deux réels et Q le plan dont une équation cartésienne est $(a - 1)x + (b + 2)y + z - a + 2b + 3 = 0$

a) Montrer que M appartient à Q

b) Montrer que S et Q sont tangents en M

Exercice 3 (4points)

On considère la suite
$$\begin{cases} u_n = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n}{2 + u_n} \end{cases} n \in \mathbb{N}$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $0 \leq u_n \leq 2$

2) Montrer que (u_n) est une suite croissante.

3) Soit la suite v définie sur \mathbb{N} par $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

a) Montrer que v_n est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{4}$.

b) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire la limite de la suite (u_n) .

4) Soit la suite w définie sur \mathbb{N} par $w_0 = 0$ et $w_{n+1} = w_n + v_n$ pour $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer $w_n = \frac{8}{3} \left(\left(\frac{1}{4} \right)^n - 1 \right)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

b) Calculer alors la limite de la suite (w_n)

Exercice 4(3points)

1) Montrer que pour tout entier naturel premier $p \neq 3$; on a p divise $(3^{p-1} - 1)$

2) Justifier que 1997 est un nombre premier, quel est alors le reste de la division euclidienne de 3^{1996} par 1997

3) On considère dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ (E): $17x - 2y = 2$

a) Vérifier que le couple (2,16) est une solution de (E)

b) résoudre alors dans $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ l'équation (E)

Exercice 5(5points)

Une urne contient 6 boules blanches et 4 boules noires, indiscernables au toucher.

Les boules blanches sont numérotées $-1, -1, 0, 1, 1, 1$ et les boules noirs sont numérotées $-1, 0, 1, 1$

On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne et considère les événements suivants

A: "Les 3 boules tirées sont de même couleur "

B: "Les 3 boules tirées sont de même numéro "

C: "Les 3 boules tirées sont de même numéro et de même couleurs "

1)a) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b) En déduire que $p(A \cup B) = \frac{17}{60}$.

2) Déterminer les probabilités des événements

D: "Obtenir au moins une boule numéroté 1 "

E: "La somme de numéros inscrit sur les boules tirée est égale à 0 "

3) considère l'épreuve suivante qui consiste à tirer au hasard 2 boules de l'urne de la manière suivante:

On tire une première boule:

* Si elle porte le numéro 0, on ne la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule

* Si elle ne porte pas le numéro 0, on la remet dans l'urne et on tire une deuxième boule et on considère les événements:

M: "La première boule tirée porte le numéro 0"

N: "La deuxième boule tirée porte le numéro 1"

Calculer alors $p(N)$ (Indication : utiliser un arbre de probabilité)