

Lycée El Mnihla	Ministère de l'Education	PROF :
Date : 31-06-2011	<u>DEVOIR DE SYNTHESE N° 3</u>	KROUNA.B
Durée : 3 heures	<i>Epreuve de Mathématiques de 3^{ème} Maths</i>	

(note : le barème sera noté sur 40 pts)

Exercice n°1 : (9,5 pts)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(o; \vec{u}; \vec{v})$, on considère :

- * le point A d'affixe $a = 5 - i\sqrt{3}$
- * le point B d'affixe $b = 4 + i2\sqrt{3}$.
- * le point Q le milieu de [OB].

1°/ a. Calculer OA , OB , et $\arg\left(\frac{b}{a}\right)$ (Rq : écrire $\left(\frac{b}{a}\right)$ sous forme algébrique)

b. Dédire que OAB est un triangle équilatéral direct.

c. Montrer que l'affixe de Q est $q = 2 + i\sqrt{3}$.

d. Soit le point K pour que ABQK soit un parallélogramme, montrer que $z_k = 3 - i2\sqrt{3}$.

e. Démontrer que $\frac{z_k - a}{z_k}$ est imaginaire pur.

f. Qu'en déduit-on pour le triangle OKA.

g. préciser la nature du quadrilatère OQAK.

2°/ Soit C le point d'affixe $c = \frac{2a}{3}$

a. Calculer $\frac{z_k - b}{z_k - c}$

b. Dédire que les points B , C et K sont alignés.

Exercice N°2 (8 pts)

Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.

1/ On tire au hasard et simultanément 2 boules de l'urne

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- a. A : « avoir au moins une boule blanche » .
- b. B : « avoir 2 boules de couleur différentes ».

2/ On tire maintenant au hasard et successivement avec remise les deux boules.

a. Calculer la probabilité des évènements A et B de la première question.

b. On effectue n tirages successifs avec remise et on note p_k la probabilité d'avoir une boule blanche pour la première fois au k-ième tirage ($1 \leq k \leq n$).

i) Calculer : p_1 , p_2 et p_5 .

ii) Calculer : p_k ; avec ($1 \leq k \leq n$).

iii) Dédire en fonction de n l'expression $S_n = \sum_{k=1}^n p_k$, puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice N°3 (12,5)

Soit la fonction définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x-2}$

1/ Etudier la variation de f sur $[2, +\infty[$.

2/ On considère la suite définie par : $U_0 = 4$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = f(U_n)$

a. Montrer que pour tout n , $U_n \geq 2$.



- b. Montrer que (U_n) est une suite monotone.
 c. Dédire que (U_n) est une suite convergente.
- 3/ a. Montrer que pour tout n , $U_{n+1} - 2 \leq \frac{1}{2} (U_n - 2)$.
 b. Dédire que pour tout n , $0 \leq U_n - 2 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.
 c. Déterminer, alors, $\lim_{+\infty} U_n$
- 4/ Montrer, par récurrence, que pour tout n , $U_n = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}}$, et Retrouver, $\lim_{+\infty} U_n$.
- 5/ Montrer, par récurrence e, que : $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour $n \geq 1$
- 6/ On pose $S_n = \frac{2}{n^4} (1^3 U_1 + 2^3 U_2 + 3^3 U_3 + \dots + n^3 U_n) = \frac{2}{n^4} \sum_{p=1}^n p^3 U_p$, pour tout $n \geq 1$
- a. Montrer que pour $n \geq 1$, $\frac{2}{n^4} \sum_{p=1}^n p^3 (U_p - 2) = S_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2$.
 b. Montrer que, pour tout $n \geq 1$ $\sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^{p-1} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$
 c. Montrer que pour $n \geq 1$, $\left|S_n - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right| \leq \frac{4}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$ (Rq : $p^3 \leq n^3$ pour $p \leq n$)
 d. Dédire $\lim_{+\infty} S_n$.

Exercice N°4 (10 pts)

Soit $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère orthonormé direct de l'espace.

On donne : $A(1,-1,1)$; $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

- 1/ a. Vérifier que \vec{u} et \vec{v} sont deux vecteurs non colinéaires.
 b. Déterminer les composantes du produit vectoriel $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$.
 c. Soit le plan $P = (A, \vec{u}, \vec{v})$, déterminer une équation cartésienne de P.
- 2/ a. Soit $B(1,-1,0)$, montrer que le point B n'appartient pas au plan P.
 b. Soit (D) la droite perpendiculaire à P passant par B
 Déterminer une représentation paramétrique de (D).
- 3/ On donne l'ensemble E définie par : $(E) : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 1 = 0$.
- a. Dire pourquoi (E) est une sphère.
 b. Déterminer leur rayon r et les coordonnées de leur centre H.
- 4/ a. Déterminer les composantes de $\overrightarrow{HB} \wedge \vec{w}$
 b. Montrer que (D) et (E) sont sécants.
 c. Déterminer les coordonnées de leurs points d'intersections.

