Lycée secondaire de Tabarka *Prof* : *Mme Zouaoui*-Ibidhi	***Devoir de synthèse n°3*** ***MATHEMATIQUES***	*Classes* : *3émeMaths* *Date* : *28/05/20112* *Durée* : *3heurs* Coefficient : 4

il est recommandé de soigner la rédaction et la présentation de la copie

Exercice n°1(06pts)

1) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = 2 - \frac{1}{x}$

($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

Δ et la droite d'équation $y = x$.

a) Dresser le tableau de variation de f.

b) Etudier la position relative de ($\mathscr{C}$) et Δ.

2) Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Sur la page annexe on a tracé ($\mathscr{C}$) et Δ.

Représenter U_1, U_2 et U_3 en laissant apparents les traits de construction.

b) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n > 1$.

c) Montrer que $U_{n+1} - U_n = -\frac{(U_n - 1)^2}{U_n}$

d) En déduire le sens de variation de la suite (U_n)

3) Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = 3 + \frac{1}{U_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (V_n) est arithmétique de raison 1.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice n°2(06pts)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ on donne les points $A(1,0,2)$; $B(0,1,2)$ et $C(1,-2,0)$ et le plan Q : $3x - 2y + z + 3 = 0$

1) a) Donner les composantes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

b) Déduire que les points A, B et C déterminent un plan P

c) Déduire qu'une équation cartésienne de P est $x + y - z + 1 = 0$

2) a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires

b) Donner une représentation paramétrique de la droite $D = P \cap Q$

3) a) Déterminer les coordonnées du point H projeté orthogonale du point $I(1, 2, -2)$ sur le plan P

b) Vérifier que la distance du point I au plan P est égal à $2\sqrt{3}$

4) Soit l'ensemble $S = \{M(x,y,z) \in \xi \,/\, x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 4z - 18 = 0\}$

a) Montrer que S est une sphère dont on déterminera le centre et le rayon

b) Montrer que S et P sont sécants en un cercle dont on déterminera le centre et le rayon.

Exercice n°3(08pts)

Dans le plan P rapporté a un repère orthogonal $\Re=(O,\vec{i},\vec{j})$ on considère la fonction f_m définie par

$f_m(x)=\dfrac{x^2+mx-m-1}{x-2}$, ou m un paramètre réel, et on désigne par ζ_m sa courbe représentative.

I) On prend dans cette partie $m=1$ et on pose $f=f_1$ et $\zeta=\zeta_1$.

1) Etudier f et tracer ζ.

2) déterminer graphiquement et selon les valeurs du paramètre $\alpha\in[0,\pi]$ le nombre de solutions de l'équation : $x^2+(1-\cos\alpha)x-2(1-\cos\alpha)=0$.

3) soit g la fonction définie par $g(x)=\dfrac{x^2+x-2}{|x-2|}$ et (Γ) sa courbe représentative dans le même repère $\Re$

Déduire et tracer (Γ) à partir de ζ.

II) 1) Montrer que toutes les courbes (ζ_m) passent par un point fixe **I**

2) Montrer que pour tout $m\in\mathbb{R}$ la droite $\Delta_m : y=x+m+2$ est une asymptote à (ζ_m) au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.

3) a)Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m.

b)quel est l'ensemble E des valeurs de m pour les quelles f_m admet deux extrema relatifs ?

4) pour $m\in E$ on désigne par A_m et B_m les points de (ζ_m) représentants les extrema relatifs

a)Déterminer les coordonnées de chacun des points : A_m, B_m et $\Omega_m=A_m*B_m$.

b) Vérifier que le triangle I$A_m B_m$ et rectangle en I pour une seule valeur de m tel que I (1,0).

c) Montrer que Ω_m est un centre de symétrie de (ζ_m).

d) quel est l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit E

BONNE CHANCE