| | | |
|---|---|---|
| *Lycée Tahar Sfar Mahdia* | **Devoir de synthèse n° 3**<br>*Mathématiques* | *Niveau : 3 ème Math* |
| *Date : 28 / 05 / 2014* | *Prof : MEDDEB Tarek* | *Durée : 3 heures* |

**NB** : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

## Exercice n°1 : (5,5 pts)

### Partie A

Soit *E* l'ensemble des suites réelles $(X_n)$ qui vérifient la relation de récurrence :

$X_{n+2} = X_{n+1} + X_n$, pour tout $n \in IN$.

1) Soient $(a_n)$ et $(b_n)$ deux suites de l'ensemble *E*, et soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels.

   Montrer que la suite $(c_n)$ définie par : $c_n = \alpha a_n + \beta b_n$ est un élément de l'ensemble *E*.

2) Soit $(a_n)$ une suite géométrique de raison $q \neq 0$ et de premier terme $a_0 \neq 0$.

   Comment choisir $q$ pour que $(a_n)$ soit élément de l'ensemble *E* ?

### Partie B

On appelle suite de Fibonacci la suite définie sur $IN$ par : $\begin{cases} U_0 = 0 \ \ et \ \ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = U_{n+1} + U_n \ \ \forall n \in IN \end{cases}$.

1) $a/$ Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN^*$, $U_{n+1}.U_{n-1} - U_n{}^2 = (-1)^n$.

   $b/$ En déduire que pour tout $n \in IN^*$, $U_n$ et $U_{n+1}$ sont premiers entre eux.

2) On pose : $S_n = U_0 + U_1 + ..... + U_n = \sum_{k=0}^{n} U_k$.

   $a/$ Calculer $S_0$, $S_1$, $S_2$, $S_3$ et $S_4$.

   $b/$ Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in IN$, $S_n = U_{n+2} - 1$.

### Partie C

On pose : $q_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et $q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

On définit les suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que : $a_n = q_1^n$ et $b_n = q_2^n$.

1) Déterminer les réels $\alpha$ et $\beta$ tels que pour tout $n \in IN$, $U_n = \alpha a_n + \beta b_n$.

   (On utilisera le fait que $U_0 = 0 \ \ et \ \ U_1 = 1$).

2) On pose : $V_n = \dfrac{U_{n+1}}{U_n}$, $n \in IN^*$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $n \in IN^*$, $V_n = \dfrac{q_1\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right)^n - q_2}{\left(\dfrac{q_1}{q_2}\right)^n - 1}$.

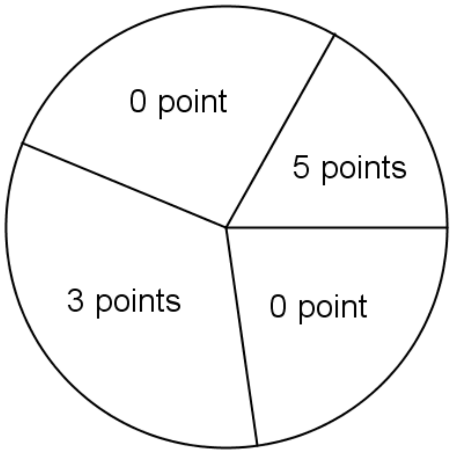
   $b/$ En déduire que : $\lim_n V_n = q_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. (cette limite est le nombre d'or).

## Exercice n°2 : *(4,5 pts)*

1) $a/$ Citer le petit théorème de Fermat.
   $b/$ Soit $p$ un nombre premier, et $n$ un entier naturel premier avec $p$.
   Montrer que $p$ divise $n^{p-1}-1$.
2) On considère la suite $u$ définie sur $IN$ par : $u_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1$.
   $a/$ Calculer les quatre premiers termes de la suite.
   $b/$ Montrer par récurrence que : pour tout entier $n \geq 1$, $9^n - 1$ est divisible par 4.
   $c/$ En déduire que : pour tout entier $n \geq 1$, $u_{2n}$ est divisible par $4$.
3) Soit $p$ un nombre premier supérieur ou égal à $5$, on se propose de démontrer que :
   $p$ divise $u_{p-2}$. Pour cela :
   $a/$ Montrer que $p$ divise $6\times 2^{p-2}-3$ et que $p$ divise $6\times 3^{p-2}-2$.
   $b/$ En déduire que $p$ divise $6\times u_{p-2}$.
   $c/$ Conclure.

## Exercice n°3 : *(4,5 pts)*

Un jeu consiste à lancer des fléchettes sur une cible. La cible est partagée en quatre secteurs comme indiqué sur la figure.




On suppose que les lancers sont indépendants et que le joueur touche la cible à tous les coups.

1) Le joueur lance une fléchette.
   On note $p_0$ la probabilité d'obtenir $0$ point.
   On note $p_3$ la probabilité d'obtenir $3$ points.
   On note $p_5$ la probabilité d'obtenir $5$ points.
   On a donc : $p_0 + p_3 + p_5 = 1$.
   Sachant que : $p_5 = \frac{1}{2} p_3$ et que $p_5 = \frac{1}{3} p_0$.
   Déterminer les valeurs de $p_0$, $p_3$ et $p_5$.
2) Une partie de ce jeu consiste à lancer trois fléchettes au maximum. Le joueur gagne la partie s'il obtient un total (pour les trois lancers) supérieur ou égal à $8$ points. Si au bout de deux premiers lancers, il a un total supérieur ou égal à $8$ points, il ne lance pas la troisième fléchette.
   On considère les événements :
   $G_2$ : « Le joueur gagne la partie en deux lancers ».
   $G_3$ : « Le joueur gagne la partie en trois lancers ».
   $P$ : « Le joueur perd la partie ».
   $a/$ Montrer que : $p(G_2) = \frac{5}{36}$. On admettra dans la suite que $p(G_3) = \frac{7}{36}$.
   $b/$ En déduire $p(P)$.

3) Un joueur joue quatre parties avec les règles données à la question 2). On suppose que le résultat d'une partie n'influe pas sur les autres.

   Déterminer la probabilité de chacun des événements suivants :

   $A$ : « Le joueur gagne exactement une partie ».

   $B$ : « Le joueur gagne au moins une partie ».

4) Une urne $U_1$ contient une boule rouge et deux boules noires, et une urne $U_2$ contient une boule rouge et trois boules noires. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

   Un joueur joue une partie de fléchettes avec les règles données à la question 2). S'il gagne la partie, il tire une boule de l'urne $U_1$. S'il perd, il tire une boule de $U_2$.

   Déterminer la probabilité de l'événement :

   $R$ : « La boule tirée est rouge ».

## Exercice n°4 : (5,5 pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On considère les points $A(1\,;\,0\,;\,0)$; $B(-1\,;\,2\,;\,0)$; $C(-1\,;\,0\,;\,2)$ et $D(1\,;\,2\,;\,2)$.

1) Montrer que le triangle $ABC$ est équilatéral.
2) Vérifier qu'une équation du plan $(ABC)$ est : $x+y+z-1=0$.
3) Soit $G$ le point de coordonnées $\left(-\frac{1}{3}\,,\,\frac{2}{3}\,,\,\frac{2}{3}\right)$. Montrer que $G$ est le centre de gravité du triangle $ABC$.
4) Soit $\mathscr{C}$ le cercle circonscrit au triangle $ABC$.

   $a/$ Montrer que $(DG)$ est l'axe de $\mathscr{C}$.

   $b/$ Montrer que le tétraèdre $ABCD$ est régulier.
5) Pour tout réel $\alpha$, on désigne par $S_\alpha$ l'ensemble des points $M(x\,;\,y\,;\,z)$ vérifiant l'équation : $x^2+y^2+z^2-2(\alpha-1)x-2\alpha y-2\alpha z+2\alpha-3=0$.

   $a/$ Montrer que $S_\alpha$ est la sphère de centre $I_\alpha(\alpha-1\,;\,\alpha\,;\,\alpha)$ et de rayon $R_\alpha=\sqrt{3\alpha^2-4\alpha+4}$

   $b/$ Vérifier que $A$ appartient à $S_\alpha$.

   $c/$ Montrer que $I_\alpha$ appartient à la droite $(DG)$.

   $d/$ Déterminer l'intersection de la sphère $S_\alpha$ et le plan $(ABC)$.

6) Montrer qu'il existe un réel $a_0$, que l'on déterminera, tel que la sphère $S_{\alpha_0}$ est circonscrite au tétraèdre $ABCD$. Vérifier que $\overrightarrow{GI_{a_0}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{GD}$.

*Bonne chance*