Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** *Mathématiques*	*Niveau : 3 ème Math*
Date : 25 / 05 / 2016	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 3 heures*

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (3 pts)

Pour chaque question, une seule des trois propositions a/, b/ et c/ est correcte. On indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

1) Lors d'une expérience aléatoire, on considère deux événements indépendants A et B tels que : $p(A) = 0,3$ et $p(B) = 0,5$ alors : $p(A \cup B)$ est égale à :

   $a/$ 0,65 $\quad$ $b/$ 0,8 $\quad$ $c/$ 0,15

2) Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace tels que $\|\vec{u}\| = 2$ et $\|\vec{v}\| = 3$ et $\vec{u}.\vec{v} = 3$ alors :

   $a/$ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 6$ $\quad$ $b/$ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = 3\sqrt{3}$ $\quad$ $c/$ $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \dfrac{3}{2}$

3) Soient A et B deux points distincts de l'espace. L'ensemble des points M tels que $\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right).\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right) = 0$ est :

   $a/$ Un plan $\quad$ $b/$ La droite (AB) $\quad$ $c/$ La sphère de diamètre $[AB]$.

Exercice n°2 : (4 pts)

On dispose de deux dés cubiques A et B, les faces du dé A sont numérotées 2, 2, 2, 2, 4, 4 et les faces du dé B sont numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6. Toutes les faces de chacun des deux dés ont la même probabilité d'apparition.

On lance les deux dés, on désigne par a le chiffre de la face supérieure du dé A, et par b le chiffre de la face supérieure du dé B.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   F : « $a = b$ ».

   G : « $a > b$ ».

   H : « $a < b$ ».

2) Lorsqu'un joueur X lance les deux dés A et B, on dit qu'il a fait une partie. Il gagne la partie lorsque l'événement G est réalisé.

   Le joueur X fait quatre parties.

   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

   M : « Le joueur X gagne exactement deux parties ».

   N : « Le joueur X gagne au moins une partie ».

Exercice n°3 : (3 pts)

1) $a/$ Citer le Lemme de Gauss.

   $b/$ Soient a et b deux entiers naturels tels que $a \wedge b = 1$.

   Montrer que : Si a divise c et b divise c alors ab divise c.

2) Soit n un entier naturel.

   $a/$ Vérifier que : $n^7 - n = \left(n^2 - n\right)\left(n^2 + n + 1\right)\left(n^3 + 1\right) = \left(n^3 - n\right)\left(n^4 + n^2 + 1\right)$.

   $b/$ En déduire, en utilisant le petit théorème de Fermat, que $n^7 - n$ est divisible par 42.

Exercice n°4 : (4,5 pts)

1) $a/$ Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, 5 divise $2^{4n} - 1$.

   $b/$ En déduire le reste de la division euclidienne de 2^{2016} et de 2^{2017} par 5.

2) On considère les suites (x_n), (y_n) et (z_n) définies sur IN par :

$$x_0 = 3 \text{ et } x_{n+1} = 2x_n - 1.$$
$$y_0 = 1 \text{ et } y_{n+1} = 2y_n + 3.$$
$$z_n = x_n - 1.$$

   $a/$ Montrer que (z_n) est une suite géométrique,

   $b/$ Exprimer z_n en fonction de n, en déduire que pour tout $n \in IN$, $x_n = 2^{n+1} + 1$.

3) $a/$ Montrer par récurrence que, pour tout $n \in IN$, $2x_n - y_n = 5$.

   $b/$ Exprimer y_n en fonction de n.

4) On note $d_n = x_n \wedge y_n$, pour tout $n \in IN$.

   $a/$ Montrer que $d_n = 1$ ou $d_n = 5$.

   $b/$ Calculer $\left(2^{2016} + 1\right) \wedge \left(2^{2017} - 3\right)$.

Exercice n°5 : (5,5 pts)

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On munit l'espace d'un repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$ et on désigne par J et K les milieux respectifs des segments $[DE]$ et $[EF]$.

1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AK} \wedge \overrightarrow{AG}$.

   $b/$ Montrer qu'une équation du plan (AGK) est : $2x - y - z = 0$.

2) $a/$ Montrer que la droite (BJ) est perpendiculaire au plan (AGK).

   $b/$ Déterminer les coordonnées du point N intersection de (BJ) et (AGK).

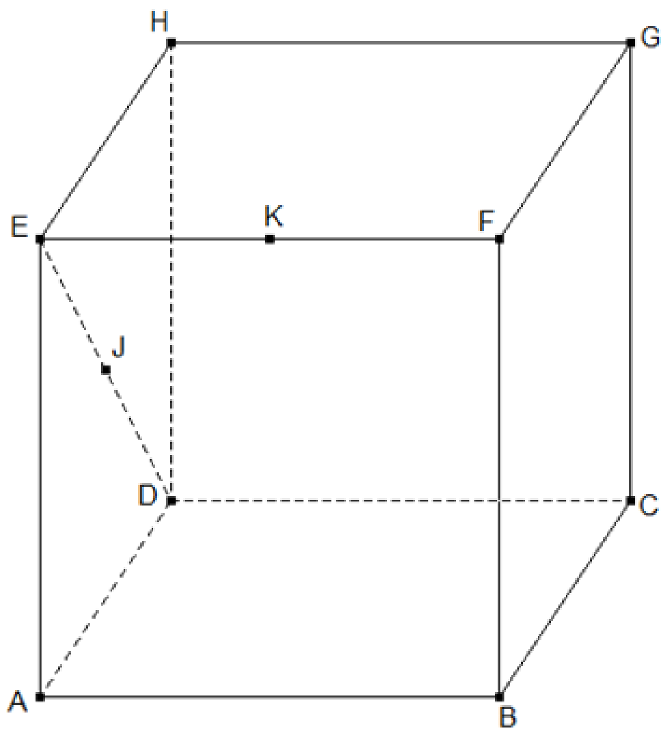
3) Soit P le plan passant par B et parallèle au plan (AGK) et S la sphère passant par A et tangente à P en B. on note Ω le centre de S.

$a/$ Montrer que Ω appartient à la droite (BJ) et vérifier que $\Omega A = \Omega B$.

$b/$ Déterminer une équation cartésienne du plan médiateur de $[AB]$ noté Q.

$c/$ En déduire que $\Omega\left(\frac{1}{2};\frac{1}{4};\frac{1}{4}\right)$, puis calculer le rayon R de la sphère S.

$d/$ Montrer que le plan (AGK) coupe S suivant un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.



Bonne chance