Devoir de Synthèse N° 3

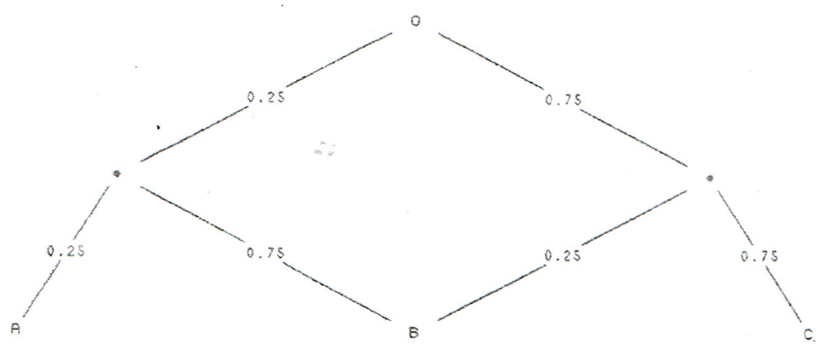
Section : Maths

Epreuve : Mathématiques

DURÉE 3 H

Exercice 1-2

Une bille, lâchée en O tombe dans l'une des trois boîtes A, B, C. A chaque bifurcation, la bille tombe à gauche avec la probabilité de 0.25 et à droite avec la probabilité de 0.75



a) Calculer les probabilités P(A), P(B), P(C) pour qu'une bille lâchée de O tombe respectivement dans la boîte A, B ou C.

b) On lâche deux billes en O. Calculer la probabilité pour que
- les deux billes tombent dans la boîte A ;
- les deux billes tombent dans la même boîte.

c) On lâche trois billes en O. Calculer la probabilité d'avoir une bille dans chaque boîte.

d) On lâche dix billes en O. Calculer la probabilité d'avoir au moins trois billes dans la boîte B.

Exercice 1-1

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(A;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ et ABCDEFGH est un parallélépipède tel que $\overrightarrow{AB}=\vec{i}$, $\overrightarrow{AD}=2\vec{j}$ et $\overrightarrow{AE}=3\vec{k}$.

1° a) Vérifier que $\overrightarrow{AG}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$

b) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{ED}\wedge\overrightarrow{EG}$

c) Déterminer une équation cartésienne du plan (EDG)

d) Vérifier que les plans (AFC) et (EDG) sont parallèles

2° Calculer le volume du tétraèdre BEDG

3° Soit I le centre de gravité du triangle AFC. La droite (BH) coupe le plan (EDG) en J.

a) Déterminer les coordonnées de J

b) Montrer que I est le milieu du segment $[BJ]$

4° Soit K le milieu de $[FC]$ et k' l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{BI}$

a) Montrer que le point k' appartient au plan (EDG)

b) Soit Δ la droite parallèle à (BH) et passant par A. Δ coupe le plan (EDG) en A'.
Montrer que les points J, K' et A' sont alignés.

Problème

Dans ce problème on étudie la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ si $x>0$ et $f(0)=1$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Démontrer que f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour $x>0$.

2°) Dans cette question, on va s'intéresser au signe de f.

a) Déterminer les réels $x \geqslant 0$ tels que $f(x)=0$.

On rangera ces nombres en une suite strictement croissante $(a_1, a_2, ..., a_k, ...)$.

b) Étudier le signe de f.

3°) a) Démontrer que pour tout réel $x>0$, on a $-\dfrac{1}{x} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{x}$.

En déduire la limite de f en $+\infty$.

b) Déterminer les réels $x>0$ tels que l'on ait $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et ceux tels que l'on ait $f(x)=-\dfrac{1}{x}$.

On rangera ces nombres en deux suites strictement croissantes $(b_1, b_2, ..., b_k, ...)$ et $(c_1, c_2, ..., c_k, ...)$.

c) En déduire la position relative de $\mathcal{C}$ par rapport aux courbes H_+ et H_- d'équations respectives $y=\dfrac{1}{x}$ et $y=-\dfrac{1}{x}$.

Comparer les tangentes à $\mathcal{C}$ et H_+ au point d'abscisse b_k ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}$ et H_- au point d'abscisse c_k.

4°) Le but de cette question est d'étudier les variations de f.

a) Étudier le signe de la fonction $x \longmapsto \tan x - x$ sur l'intervalle $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

En déduire le signe de f' sur cet intervalle.

b) En déduire que pour tout entier naturel $k \geqslant 1$, il existe un élément un élément x_k et un seul de l'intervalle $\left]-\dfrac{\pi}{2}+k\pi\,;\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right[$ et que $\tan x_k = x_k$. Démontrer que $x_k > k\pi$.

c) En déduire le signe de f' sur $]0\,;x_1[$, puis sur chaque intervalle $]x_k\,;x_{k+1}[$ où $k \in \mathbb{N}^*$.

5°) Dans cette question, on va étudier la fonction f en 0.

a) Démontrer que pour tout réel $x \geqslant 0$, on a : $0 \leqslant x - \sin x \leqslant \dfrac{x^3}{6}$.

Pour cela, on introduira la fonction φ définie sur $[0\,;+\infty[$ par $\varphi(x)=\sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ puis on calculera $\varphi'(x)$, $\varphi''(x)$, $\varphi^{(3)}(x)$ et on en déduira le signe de φ.

b) Démontrer que f est dérivable en 0 et calculer $f'(0)$.

6°) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$.

b) Tracer su un même graphique les courbes H_+, H_- et $\mathcal{C}$ en se limitant à l'intervalle $[0\ ;\ 3\pi]$ et placer les points a_k, b_k, c_k et x_k.

On utilisera les valeurs approchées $x_1 \approx 4{,}49$ et $x_2 \approx 7{,}73$.

On prendra pour unité graphiques 1 cm sur l'axe des abscisses et 3 cm sur l'axe des ordonnées.