Lycée Tahar Sfar Mahdia	**Devoir de synthèse n° 3** *Mathématiques*	*Niveau : 3ème Math*
Date : 22 / 05 / 2017	*Prof : MEDDEB Tarek*	*Durée : 3 heures*

NB : *Il sera tenu compte du soin apporté à la rédaction et à la présentation.*

Exercice n°1 : (5 pts)

1) Soit h la fonction définie sur $[0,\pi]$ par : $h(x)=\sin x(1+\cos x)-2x$.

   $a/$ Montrer que, pour tout $x\in[0,\pi]$, $h'(x)=(\cos x-1)(2\cos x+3)$.

   $b/$ Etablir le tableau de variations de h.

   $c/$ En déduire le signe de $h(x)$ sur $[0,\pi]$.

2) Soit f la fonction définie sur IR par : $f(x)=\sin x(1+\cos x)$.

   On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

   $a/$ Montrer que f est 2π- périodique.

   $b/$ Etudier la parité de f.

   $c/$ Montrer que, pour tout $x\in IR$, $f'(x)=(\cos x+1)(2\cos x-1)$.

   $d/$ Dresser le tableau de variations de f sur $[0,\pi]$. Préciser $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

3) $a/$ Ecrire une équation de la tangente Δ à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

   $b/$ Etudier la position de $\mathscr{C}$ par rapport à Δ sur $[0,\pi]$.

   $c/$ Tracer la partie de $\mathscr{C}$ sur l'intervalle $[-\pi;3\pi]$ dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ de la feuille annexe.

Exercice n°2 : (3 pts)

1) Montrer qu'un entier naturel n est divisible par 10 si, et seulement si, n est divisible par 2 et par 5.

2) Soient a et b deux entiers naturels tels que $a\geq b$. Montrer l'équivalence suivante :

   (a et b ont le même chiffre des unités) si, et seulement si ($a-b$ est divisible par 10).

3) Soient n et p deux entiers naturels tels que $p\neq 0$.

   $a/$ Vérifier que : $n^{p+4}-n^p=n^{p-1}(n^5-n)=(n^2-n)(n^p+n^{p-1})(n^2+1)$.

   $b/$ Démontrer, en utilisant le petit théorème de Fermat que : $n^{p+4}-n^p$ est divisible par 10.

   $c/$ En déduire que le entiers 7^{2017} et 7^{2021} ont le même chiffre des unités.

Exercice n°3 : *(3 pts)*

1) Montrer, par récurrence sur n, que, pour tout $n \in IN^*$ et pour tout $x \in IN^*$, on a :

$$(x+1)^n - 1 \text{ est divisible par } x.$$

2) Soient p et q deux entiers naturels non nuls et distincts.

   $a/$ Vérifier que : $2^{pq} = \left[\left(2^p - 1\right)+1\right]^q$.

   $b/$ En déduire que : $2^p - 1$ divise $2^{pq} - 1$.

3) On appelle nombre de Mersenne tout entier de la forme $M_n = 2^n - 1$, où n est un entier supérieur ou égal à 2.

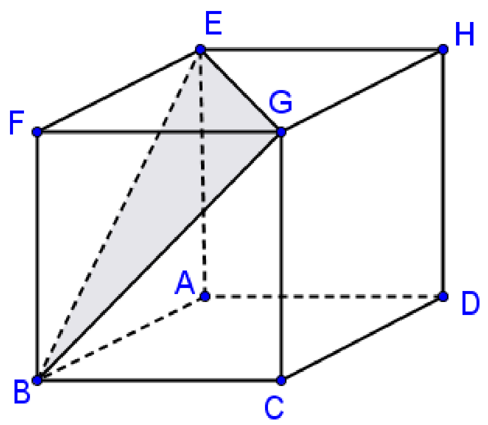
   $a/$ Vérifier que M_2, M_3, M_5 et M_7 sont premiers et que M_{11} est composé.

   $b/$ Montrer que, si M_n est premier, alors n est premier. (On pourra raisonner par l'absurde).

   $c/$ La réciproque est-elle vraie ?

Exercice n°4 : *(5 pts)*

Soit $ABCDEFGH$ un cube d'arête 1. On munit l'espace du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.



1) $a/$ Déterminer les composantes du vecteur $\vec{n} = \overrightarrow{BE} \wedge \overrightarrow{BG}$.

   $b/$ En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BEG) est : $x - y + z - 1 = 0$.

2) $a/$ Vérifier que la droite (DF) est perpendiculaire au plan (BEG).

   $b/$ Déterminer les coordonnées du point K intersection de (DF) et (BEG).

3) Pour tout réel m . On considère l'ensemble S_m des points $M(x;y;z)$ vérifiant l'équation :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2(1-m)y - 2mz + 2m - \frac{1}{3} = 0.$$

   $a/$ Montrer que, pour tout $m \neq \frac{2}{3}$, S_m est la sphère de centre $I_m(m\,;1-m\,;m)$ et de rayon $R_m = \sqrt{3}\left|m - \frac{2}{3}\right|$.

   $b/$ Montrer que, lorsque m décrit $IR \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$, I_m varie sur la droite (DF) privée du point K.

   $c/$ Montrer que S_m est tangente au plan (BEG) et préciser le point de tangence.

4) Soit P le plan passant par A et parallèle à (BEG).

   Déterminer la valeur de m pour que S_m coupe P suivant un cercle de rayon 1.

Exercice n°5 : *(4 pts)*

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres. Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts désignés par a et b. Lorsqu'une montre présente l'un de deux défauts, elle sera déclarée défectueuse.

Une étude statistique montre que $6\ \%$ des montres fabriqués présentent le défaut a et $10\ \%$ présentent le défaut b.

Une montre est tirée au hasard. On définit les événements suivants :

A : « La montre tirée présente le défaut a ».

B : « La montre tirée présente le défaut b ».

C : « La montre tirée ne présente aucun défaut ».

D : « La montre tirée est défectueuse ».

E : « La montre tirée présente le défaut a seulement ».

On suppose que les événements A et B sont indépendants.

On donnera des valeurs approchées des résultats à 10^{-3} près.

1) $a/$ Calculer $p(A)$ et $p(B)$ puis montrer que $p(D)=0{,}154$.

   $b/$ Calculer $p(C)$ et $p(E)$.

2) Au cours de la fabrication, on prélève au hasard trois montres, on considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font successivement avec remise et sont indépendants.
   Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   X : « Deux parmi les trois montres tirées sont défectueuses ».

   Y : « Au moins une parmi les trois montres tirées est non défectueuse ».

Bonne chance

FEUILLE ANNEXE À RENDRE AVEC LA COPIE

Devoir de synthèse n° 3 *(22 – 05 – 2017)*

Nom et prénom :………………………………………… *Classe : 3 ème Math*