

<i>Lycée Houmet Souk</i>	<i>Devoir de Synthèse N : 3</i>	<i>3 Mathématique 1</i>
<i>Prof : Loukil Mohamed</i>	<i>Durée : 3 Heures</i>	<i>17 Mai 2018</i>

**EXERCICE N : 1 ( 4 points )**

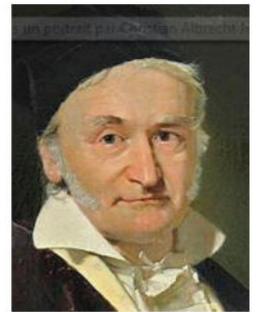
Une boîte contient neuf boules , quatre noires numérotées **1, 2, 3, 4**, trois vertes numérotées **4, 5, 6** et deux blanches numérotés **5, 6** .

- A )** On tire **simultanément deux boules** numérotés **a** et **b** . Calculer la probabilité des évènements suivants : **A** : « les deux boules tirées portent des numéros pairs »  
**B** : « les deux boules tirées sont de la même couleur » ; **C** : « **a** et **b** sont des nombres premiers »  
**D** : « les deux boules tirées sont vertes de plus **a** et **b** sont des nombres premiers entre eux »  
**E** : « **4** divise **a + b** » ; **F** : « **5** est un diviseur de **a.b** » ; **G** : « **a + b** divise **2a + 2b + 7** » .

- B )** On tire **successivement et sans remise trois boules** .

Calculer la probabilité des évènements suivants :

- A'** : « Obtenir exactement deux numéros impairs »  
**B'** : « Obtenir au moins une fois le numéro **5** »  
**C'** : « Le numéro **4** apparaît pour la seule fois au troisième tirage »  
**D'** : « Le numéro **6** apparaît pour la première fois au deuxième tirage » .



Carl Friedrich Gauss

**EXERCICE N : 2 ( 5.5 points )**

On considère dans l'espace  $(\xi)$  muni du repère orthonormé direct  $R(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ,

les points **A** ( 3 , - 3 , 0 ) , **B** ( - 3 , - 3 , 8 ) , le plan **P** :  $x + 2y - 2z + 5 = 0$  et l'ensemble :

$$(S) = \{ M(x, y, z) \in \xi \text{ tels que : } x^2 + y^2 + z^2 + 6y - 8z = 0 \} .$$

- 1) a)** Montrer que **(S)** est une sphère dont on précisera le centre  $\Omega$  et de rayon **R** .  
**b)** Vérifier que **[AB]** est un diamètre de **(S)** .
- 2)** Déterminer une représentation paramétrique de la droite  $\Delta$  passante par  $\Omega$  et perpendiculaire à **P**
- 3)** Déterminer les coordonnées du point **H** intersection de **P** et  $\Delta$  .
- 4)** Montrer que **P** coupe **(S)** suivant un cercle (**o**) dont on précisera le centre et le rayon .
- 5) a)** Soit le plan **Q** :  $3x - 4z - 9 = 0$  . Montrer que **Q** est tangent à **(S)** en **A** .  
**b)** Donner une équation cartésienne du plan **Q'** strictement parallèle à **Q** et tangent à **(S)** .
- 6)** Soit le point **C** ( 0 , - 6 , 0 ) .  
**a)** Calculer le vecteur  $\vec{u} = \vec{OA} \wedge \vec{OB}$  .  
**b)** Vérifier que **OABC** est un tétraèdre inscrit dans la sphère **(S)** .  
**c)** Calculer **V** le volume du tétraèdre **OABC** .



Pierre de Fermat

- 7)** Donner une équation cartésienne du plan **P'** médiateur du segment **[AH]** .

- 8)** Déterminer les coordonnées du point **J** centre de la sphère **(S')** passante par **A** et tangente à **P** en **H**



### EXERCICE N : 3 ( 4.5 points )

Soit la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \cos(2x) + 2 \sin(x) + \frac{1}{2}$ .

On désigne par  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthogonal.

1) a) Montrer que la droite  $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$  est un axe de symétrie de  $(Cf)$ .

b) En déduire qu'il suffit d'étudier  $f$  sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

2) a) Montrer que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = 4(\frac{1}{2} - \sin x) \cos x$ .

b) Etudier les variations de  $f$  sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ .

3) Calculer  $f(-\frac{\pi}{6})$  et  $f(0)$ .

4) Tracer, dans un repère orthogonal  $R(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $(\Gamma)$  de la restriction de  $f$  sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}]$

5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$  par :  $g(x) = \cos(2x) + 2 \sin(|x|) + \frac{1}{2}$ .

a) Montrer que pour tout  $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$  ;  $g(x) = f(x)$ .

b) Utiliser  $(\Gamma)$  pour construire  $(Cg)$  dans le même repère  $R$ . (Expliquer)

c) Résoudre graphiquement l'encadrement :  $\frac{3}{2} < g(x) < 2$ .



Marin Mersenne

### EXERCICE N : 4 ( 6 points ) Les parties A et B sont indépendantes

A) 1)  $n$  est un entier naturel. Montrer que :

(  $n$  est divisible par 10 ) **si et seulement si** (  $n$  est divisible par 2 et 5 )

2) Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a \geq b$ . Montrer que :

(  $a$  et  $b$  ont le même chiffre des unités ) **si et seulement si** (  $a - b$  est divisible par 10 )

3) Soient  $n$  et  $p$  deux entiers naturels non nuls.

a) Vérifier que :  $n^{p+4} - n^p = n^{p-1}(n^5 - n) = (n^2 - n)(n^p + n^{p-1})(n^2 + 1)$ .

b) Déduire, en utilisant le petit théorème de Fermat, que :  $n^{p+4} - n^p$  est divisible par 10.

4) En utilisant les questions précédentes prouver que  $8^{674}$  et  $4^{1013}$  ont le même chiffre des unités

B) 1) Soit  $x$  un entier naturel non nul. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^* : (x+1)^n - 1$  est divisible par  $x$

2) Soient  $p$  et  $q$  deux entiers naturels non nuls :

a) Vérifier que :  $2^{pq} = [(2^p - 1) + 1]^q$ .

b) Déduire que :  $2^p - 1$  divise  $2^{pq} - 1$ .



3) On appelle **nombre de Mersenne** tout entier de la forme  $M_n = 2^n - 1$ , où  $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$ .

a) Vérifier que  $M_2$ ,  $M_3$ ,  $M_5$  et  $M_7$  sont premiers et que  $M_{11}$  est composé.

b) Montrer que, si  $M_n$  est premier alors  $n$  est premier. (On pourra raisonner par l'absurde)

c) La réciproque est-elle vraie ?

**Wikipédia** : Aujourd'hui, le plus grand nombre premier connu est de Mersenne  $2^{77232917} - 1$

qui a été découvert le 26 décembre 2017 par un réseau d'ordinateurs (projet GIMPS / Jonathan Pace)

