Limites et asymptotes

Soit f une fonction

➢ Limite infinie en l'infini :

Lorsque $f(x)$ peut être rendu supérieur à tout réel positif A pour x suffisamment grand, on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

On définit de manière similaire :

⇨ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$ ($f(x)$ devient inférieur à $-A$)

⇨ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ (x doit être suffisamment grand en valeur absolu mais négatif)

⇨ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty \ ; \ \lim_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty \ ; \ n \in \mathbb{N}^*}$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty \text{ si } n \text{ est un entier positif pair} \\ -\infty \text{ si } n \text{ est un entier positif impair} \end{cases}}$$

➢ Limite finie en l'infini :

Lorsque $f(x)$ peut être rendu aussi proche qu'on le désir d'un réel L pour x suffisamment grand, on dit que $f(x)$ tend vers L lorsque x tend vers $+\infty$.

On écrit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$

On définit de manière similaire : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \ ; \ n \in \mathbb{N}^*}$$

➢ Asymptotes horizontales :

Lorsque $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = L$, la courbe représentative de f admet

la droite d'équation* $y = L$ *comme asymptote horizontale *; cela signifie que lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = L$.*

➢Asymptotes verticales :

Lorsque $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ *ou* $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$; $(x_0 \in \mathbb{R})$, *la courbe représentative de f admet* ***la droite d'équation*** $x = x_0$ ***comme asymptote verticale*** *; cela signifie que lorsque x tend vers x_0, la courbe représentative de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $x = x_0$.*

➢Asymptotes obliques :

Soit f une fonction et (ξ_f) sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{i},\vec{j})$

Lorsque $\lim_{x \to +\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *; on dit que* ***la droite d'équation*** $y = ax + b$ ***est une asymptote oblique à*** (ξ_f) ***au voisinage de*** $+\infty$.

Lorsque $\lim_{x \to -\infty} \left[f(x) - (ax+b)\right] = 0$; $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ *; on dit que* ***la droite d'équation*** $y = ax + b$ ***est une asymptote oblique à*** (ξ_f) ***au voisinage de*** $-\infty$.

➢Limites et opérations :

❶ *Sommes :*

Limite de f	L_1	L_1	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de g	L_2	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $(f+g)$	$L_1 + L_2$	$\pm\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I$

❷ *Produits :*

Limite de f	L_1	$L_1 \neq 0$	$\pm\infty$	0
Limite de g	L_2	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
Limite de $(f \times g)$	$L_1 \times L_2$	$\pm\infty$ *(règles des signes)*	$\pm\infty$ *(règles des signes)*	$F.I$

❸ **Quotients :**

Limite de f	L_1	L_1	$\pm\infty$	$L_1 \neq 0$	$\pm\infty$	0
Limite de g	$L_2 \neq 0$	$\pm\infty$	L_2	0	$\pm\infty$	0
Limite de $\left(\frac{f}{g}\right)$	$\frac{L_1}{L_2}$	0	$\pm\infty$ (règles des signes)	$\pm\infty$ (règles des signes)	$F.I$	$F.I$

Exercice N° 01 :

Limites en ∞ :

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{x + 2007}{x^2 + x}$

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + x + 1} - x \right)$

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{2x^2 + 1} - \frac{x^2}{x + 1} \right)$

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[\frac{3x^2}{2x + 1} - \frac{(2x - 1)(3x^2 + x + 2)}{4x^2} \right]$

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \frac{(x + 1)^{10} + (x + 2)^{10} + \cdots + (x + 100)^{10}}{x^{10} + 100^{100}}$

✪ $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2} \right)$

- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-4}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x-1}-2x\right)$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+5}}-x\right)$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1}-x\sqrt{x}\right)$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+2x}-\sqrt{x^2+3}\right)$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+4}+2x-\sqrt{x}}{x+2\sqrt{x}+\sqrt{x^2+x+7}}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2}\right)$
- ✪ $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x+\sqrt{x}}\right)$

Exercice N° 02 :

Limites en a, $(a \in \mathbb{R})$ **:**

- ✪ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-4}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{x-9}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2+x-6}{x^3-8}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{7-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{1}{5-2x}}}}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$
- ✪ $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x+3}}{x^2-2x}$

✪ $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-2}{x}$

Exercice N° 03 :

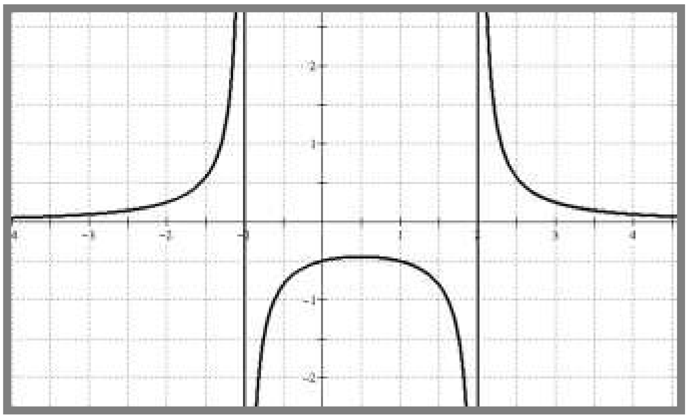
Dans chacun des cas ci-dessous , on donne trois fonctions et la représentation graphique (ξ) de l'une d'entre elles. Retrouver celle qui est représentée, en justifiant (qu'est ce que qui permet d'éliminer les deux autres)

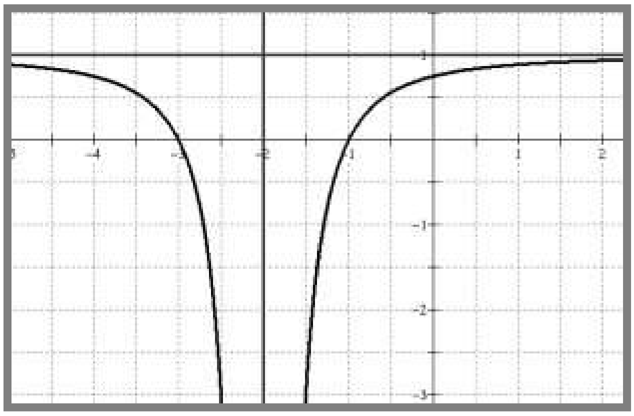
1er cas :

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+1)(x+2)} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{(x+1)(x-2)} \quad ; \quad f_3(x) = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$$

2ème cas :

$$g_1(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \quad ; \quad g_2(x) = 1 - \frac{1}{(x+2)^2} \quad ; \quad g_3(x) = \frac{-1}{(x+2)^2}$$





Exercice N° 04 :

Trouver les asymptotes parallèles aux axes que peuvent présenter les courbes des fonctions suivantes :

❶ $f(x) = \dfrac{3x-1}{x}$; ❷ $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$; ❸ $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

❹ $f(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$; ❺ $f(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$; ❻ $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}$

Exercice N° 05 :

On considère la fonction f définie par : $f(x)=\dfrac{x^3+3x^2-4x-20}{x+3}$

1/ Déterminer D_f (le domaine de définition de f)

2/ Déterminer trois réels a, b et c tels que pour $x \in D_f$, on a :

$f(x)=ax^2+b+\dfrac{c}{x+3}$

3/ Déterminer :

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-3)^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-3)^-} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-\left(ax^2+b\right)\right]$

4/ Soit g la fonction numérique définie par $g(x)=x^2-4$

a) Etudier le signe de $f(x)-g(x)$ suivant les valeurs de x

b) En déduire les positions relatives de (ξ_f) et (ξ_g).

c) Construire (ξ_f) et (ξ_g) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Exercice N° 06 :

soit $x \in \left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ .Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on considère les points $A(1;0)$, $M(\cos(x);\sin(x))$, $P(\cos(x);0)$ et $T(1;\tan(x))$

Soit $\mathcal{A}_1$ l'aire du triangle OAM , $\mathcal{A}_2$ l'aire du secteur de disque OAM et $\mathcal{A}_3$ l'aire du triangle OAT .

1/ En comparant ces aires , prouver que :

$\sin(x)\le x\le\tan(x)$

2/ En déduire que $\cos(x)<\dfrac{\sin(x)}{x}<1$

3/ Déterminer la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ en 0

(étudier les cas $x<0$ et $x>0$)