Série d'exercices *** $3^{\text{ème}}$ M Nombres complexes	Lycée Secondaire Ali Zouaoui " Hajeb Laayoun "

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$.

Propriétés : Soient $M(z)$ avec $z=a+ib\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $A(z_A);B(z_B)$ et $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$a=R\acute{e}(z)=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$	$b=\mathrm{Im}(z)=\dfrac{z-\bar{z}}{2i}$	$\lvert z\rvert=\sqrt{\left[R\acute{e}(z)\right]^2+\left[\mathrm{Im}(z)\right]^2}$
$z=0\Leftrightarrow R\acute{e}(z)=\mathrm{Im}(z)=0$	$\lvert z\rvert=0\Leftrightarrow z=0$	$z\times\bar{z}=\lvert z\rvert^2$
$z\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \mathrm{Im}(z)=0\Leftrightarrow z=\bar{z}$	$z\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow R\acute{e}(z)=0\Leftrightarrow z=-\bar{z}$	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
$Aff\left(\overrightarrow{AB}\right)=z_B-z_A$	$I=A*B\Leftrightarrow z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$	$Aff\left(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}\right)=\alpha\,Aff\left(\vec{u}\right)+\beta\,Aff\left(\vec{v}\right)$
$\arg(z)\equiv\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)[2\pi]\,;k\in\mathbb{Z}^*$	$a\in\mathbb{R}_+ : z^2=a\Leftrightarrow z=\pm\sqrt{a}$	$a\in\mathbb{R}_- : z^2=a\Leftrightarrow z=\pm i\sqrt{\lvert a\rvert}$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z,z' et pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a :

$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z'}$	$\overline{z\times z'}=\bar{z}\times\bar{z'}$	$\overline{z^n}=\left(\bar{z}\right)^n$
$\overline{\left(\dfrac{1}{z}\right)}=\dfrac{1}{\bar{z}}\,;z\neq0$	$\overline{\left(\dfrac{1}{z^n}\right)}=\dfrac{1}{\left(\bar{z}\right)^n}\,;z\neq0$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\bar{z}}{\bar{z'}}\,;z'\neq0$
$\lvert z\times z'\rvert=\lvert z\rvert\times\lvert z'\rvert$	$\lvert z^n\rvert=\lvert z\rvert^n$	$\left\lvert\dfrac{z}{z'}\right\rvert=\dfrac{\lvert z\rvert}{\lvert z'\rvert}\,;z'\neq0$
$\lvert z+z'\rvert\leq\lvert z\rvert+\lvert z'\rvert$		

Forme cartésien – Forme trigonométriques :

Forme cartésien $z=a+i\,b\,;(a,b)\in\mathbb{R}^2$	$\xrightarrow{a=r\cos(\theta)\;;\;b=r\sin(\theta)}$ $\xleftarrow[r=\sqrt{a^2+b^2}\;;\;\cos(\theta)=\frac{a}{r}\;;\;\sin(\theta)=\frac{b}{r}]{}$	Forme trigonométriques $z=r\left[\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right];r>0$

➢ Pour tous nombres complexes non nuls z et z' d'écriture trigonométriques :

$z=[r\,,\theta]=r\left[\cos(\theta)+i\sin(\theta)\right]\,;\,z'=[r'\,,\theta']=r'\left[\cos(\theta')+i\sin(\theta')\right]\,;\,(r,r')\in{\mathbb{R}_+^*}^2$ et $n\in\mathbb{N}^*$

On a : $z\times z'=[r\times r'\,,\theta+\theta']\,;\,\dfrac{z}{z'}=\left[\dfrac{r}{r'}\,,\theta-\theta'\right]$ avec $z'\neq0\,;\,z^n=\left[r^n\,,n.\theta\right]$.

Colinéarité et orthogonalité de deux vecteurs:

- $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$ avec $A(z_A)$, $B(z_B)$ et $C(z_C)$ sont deux à deux distincts.
- A, B et C sont alignés ssi $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv 0[\pi]$.
- $(AB) \perp (AC)$ ssi $\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice N° 01 :

1- Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

$$z_0 = 2 - \frac{1}{i}\ ;\ z_1 = 2i + \frac{2}{i}\ ;\ z_2 = (2-i)^2\ ;\ z_3 = (1+i)^3\ ;\ z_4 = \frac{1+2i}{2-i}\ ;\ z_5 = i^n \text{ avec } n \in \mathbb{N}\ .$$

2- Déterminer le module des nombres complexes suivants :

$$z_0 = 1 - \frac{2}{i}\ ;\ z_1 = 3i - \frac{2}{i}\ ;\ z_2 = (2+i)^2\ ;\ z_3 = (2+3i)^3\ ;\ z_4 = \frac{3+2i}{2i-1}\ ;\ z_5 = \frac{i^n}{(2+i)^3} \text{ avec } n \in \mathbb{N}$$

3- Mettre sous la forme $a+ib\ ;(a,b) \in \mathbb{R}^2$ les nombres :

$$\frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \left(\frac{1+i}{2-i}\right)^2 + \frac{3+6i}{3-4i} \quad ; \quad \frac{2+5i}{1-i} + \frac{2-5i}{1+i}$$

Exercice N° 02 :

Soient $z_1 = \dfrac{a+ib}{a-ib}$ et $z_2 = \dfrac{a-ib}{a+ib}\ ;(a,b) \in \mathbb{R}^{*^2}$.

Montrer que :

a) $z_1 + z_2 \in \mathbb{R}$; b) $z_1 - z_2 \in i\mathbb{R}$

Exercice N° 03 :

1- Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes :

$$z = -1 + i\sqrt{3} \quad ; \quad z' = 1 + i \quad ; \quad z'' = \frac{z}{z'}$$

2- En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$

Exercice N° 04 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Soit $z' = \dfrac{z - 2i}{iz - 4}$

1- Déterminer et construire l'ensemble E_1 des points $M(z)$ tel que z' soit réel .

2- Déterminer et construire l'ensemble E_2 des points $M(z)$ tel qu'un argument de z' soit $\frac{\pi}{2}$.

3- Déterminer et construire l'ensemble E_3 des points $M(z)$ tel que $|z'|=2$

Exercice N° 05 :

Soient $A(1+i)$, $B(4+5i)$ et $C(5-2i)$

1- a) Montrer que ABC est un triangle rectangle et isocèle en A.

b) En déduire le centre et le rayon du cercle ($\mathscr{C}$) circonscrit au triangle ABC.

2- Déterminer l'affixe z_D du point D pour que le quadrilatère $ABDC$ soit un carré.

Exercice N° 06 :

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soient $A(1+ia)$ et $B(1-ia)$ avec $a=a_1+ia_2\,;(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$.

1- Montrer que O ; A et B sont alignés si et seulement si $a_1=0$.

2- Montrer que $(OA)\perp(OB)\Leftrightarrow|a|=1$.

3- Déterminer a pour que OAB soit un triangle rectangle et $a_1=a_2$.

Exercice N° 07 :

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Déterminer et construire les ensembles des points $M(z)$, $z\neq 0$ suivants :

1- $(\Gamma_1)=\{M\in\mathscr{P}/\ \arg(z)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\ \}$

2- $(\Gamma_2)=\{M\in\mathscr{P}/\ \arg(z)\equiv\frac{3\pi}{4}[2\pi]\ \}$

3- $(\Gamma_3)=\{M\in\mathscr{P}/\ \arg(z)\equiv\pi[2\pi]\ \}$

4- $(\Gamma_4)=\{M\in\mathscr{P}/\ \ |z|=2 \text{ et } \arg(z)\equiv\frac{\pi}{3}[2\pi]\ \}$

Exercice N° 08 :

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$

Soient $A(3)$, $B(-3)$ et $M(z)$, on considère l'ensemble :

$(\Gamma)=\{M\in\mathscr{P}/\ \frac{MB}{MA}=2\ \}$

1- Montrer que $M\in(\Gamma)\Leftrightarrow(z-5)(\bar{z}-5)=16$

2- Déterminer et construire l'ensemble (Γ)

Exercice N° 09 :

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$

Soient $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ deux vecteurs non nuls d'affixes respectives $z_{\vec{e}_1}$ et $z_{\vec{e}_2}$.

1- Montrer que $z_{\vec{e}_1} \times \overline{z_{\vec{e}_2}} = \vec{e}_1.\vec{e}_2 - i\ dét\left(\vec{e}_1,\vec{e}_2\right)$.

2- En déduire que :

a) $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont colinéaires ssi $z_{\vec{e}_1} . \overline{z_{\vec{e}_2}} \in \mathbb{R}$

b) $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont orthogonaux ssi $z_{\vec{e}_1} . \overline{z_{\vec{e}_2}} \in i\,\mathbb{R}$.

2- Soients $A(1+i)$, $B(1)$ et $M(z)$

a) Déterminer l'ensemble des points M tel que le triangle ABM soit rectangle en M.

b) Déterminer l'ensemble des points M tel que les points A, B et M soient alignés.

Exercice N° 10 :

Soit z un nombre complexe et $f(z)=z^2+z+1$.

1- Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations : $s^2=2$ et $t^2=-3$

2- Vérifier que $4f(z)=(2z+1)^2+3$

3- Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation $f(z)=0$.

4- Montrer que si $f(z_0)=0$ alors $f\left(\overline{z_0}\right)=0$

Exercice N° 11 :

Soit $z=\cos(\theta)+i\sin(\theta)$; $\theta\in\left]0,2\pi\right[$ et $Z=1+z+z^2+z^3+\cdots+z^n$; $n\in\mathbb{N}^*$.

1- Exprimer Z sous la forme $r\left[\cos(\alpha)+i\sin(\alpha)\right]$; $r>0$

2- En déduire que :

a) $$\sum_{k=0}^{n-1}\cos(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

b) $$\sum_{k=0}^{n-1}\sin(k\theta)=\frac{\sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{(n-1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$