

Dérivabilité en un réel :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I , on dit que f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel l tel que : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ ou

$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$ (avec $h = x - a$). Le réel l s'appelle le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.

★ Interprétations :

↪ Graphique : notion de tangente :

Si f est dérivable en a , la courbe représentative de f admet en $M(a, f(a))$ une tangente de coefficient directeur $f'(a)$; cette tangente en M a pour équation :
 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

Conséquences :

- Si f est dérivable à droite en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente T_d d'équation $T_d : y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ et $x \geq a$.
- Si f est dérivable à gauche en a alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente T_g d'équation $T_g : y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ et $x \leq a$.

Interprétation graphique :

Si	Interprétation graphique
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	(ξ_f) admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le haut d'équation : $x = a$ et $y \geq f(a)$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	(ξ_f) admet au point $M(a, f(a))$ une demi tangente verticale dirigé vers le bas d'équation : $x = a$ et $y \leq f(a)$

↪ Numérique : approximation affine :

La fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet une « bonne » approximation affine de :

$$h \mapsto f(a) + f'(a)h \text{ pour } h \text{ proche de } 0, \text{ on note } f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h.$$

↪ Cinématique : vitesse :

Si $t \mapsto f(t)$ est la loi horaire d'un mouvement, $f'(t_0)$ est la vitesse instantanée à l'instant t_0 .

Dérivation sur un intervalle :

Définition :

- * Soient a et b finis ou infinis ; On dit que la fonction f est dérivable sur $]a, b[$ si f est dérivable en tout réel de $]a, b[$.
- * Soient a un réel et b fini ou infini ; On dit que la fonction f est dérivable sur $[a, b[$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a .
- * Soient a fini ou infini et b un réel ; On dit que la fonction f est dérivable sur $]a, b]$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à gauche en b .
- * Soient a et b deux réels ; On dit que la fonction f est dérivable sur $[a, b]$ si f est dérivable sur $]a, b[$ et si elle est dérivable à droite en a et gauche en b .

Opérations sur les fonctions dérivables :

Théorème :

- * Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors $f + g$; λf ($\lambda \in \mathbb{R}$) et $f \times g$ sont dérivables sur I et pour tout $x \in I$ on a :
$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) ; (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$
$$(f \times g)'(x) = f'(x) \times g(x) + f(x) \times g'(x)$$
- * Si de plus g ne s'annule pas sur I alors les fonctions $\frac{1}{g}$; $\frac{f}{g}$ et g^n ($n \in \mathbb{N}^*$) sont dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = \frac{-g'(x)}{g^2(x)} ; \left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$\text{et } (g^n)'(x) = n g^{n-1}(x) g'(x).$$

Dérivée d'une fonction composée :

Théorème :

- * Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si g est une fonction dérivable sur $f(I)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable sur I et pour tout $x \in I$ on a :

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x).$$

- * Si f est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I alors

$$\text{la fonction } \sqrt{f} \text{ est dérivable sur } I \text{ et pour tout } x \in I \text{ on a : } (\sqrt{f})'(x) = \frac{f'}{2\sqrt{f}}(x) .$$

Lien entre signe de la dérivée et variation :

Théorème : soit f est une fonction continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$ on a :

$$* \begin{cases} \text{Si } f'(x) \geq 0 \text{ sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ est croissante sur } [a, b] \\ \text{Si } f'(x) > 0 \text{ sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ est strictement croissante sur } [a, b] \end{cases}$$

$$* \begin{cases} \text{Si } f'(x) \leq 0 \text{ sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ est décroissante sur } [a, b] \\ \text{Si } f'(x) < 0 \text{ sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ est strictement décroissante sur } [a, b] \end{cases}$$

$$* \text{ Si } f'(x) = 0 \text{ sur }]a, b[\Rightarrow f \text{ est constante sur } [a, b].$$

Lien entre dérivée et extremum local :

Théorèmes :

➤ Soit f est une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I . Si f' s'annule en un point x_0 de I en changeant de signe alors f admet un extremum local en x_0 .

➤ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$, si f admet un extrémum local en x_0 alors $f'(x_0) = 0$

Dérivée seconde , point d'inflexion :

Définition : soit (ξ_f) la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère (O, \vec{i}, \vec{j}) , un point $A \in (\xi_f)$ est un point d'inflexion de (ξ_f) si (ξ_f) traverse sa tangente en A .

Théorème : soit x_0 un réel et f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 . Si f'' s'annule en x_0 en changeant de signe alors le point $M_0(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion de (ξ_f) .



Exercice N° 01 :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x} & \text{si } x > 2 \\ x & \text{si } x \leq 2 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de f en 2 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.

Exercice N° 02 :

$$\text{Soit } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x - 1}} & \text{si } x > 1 \\ m & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

1- Déterminer la valeur de m pour que f soit continue en 1

2- a) Etudier alors la dérivabilité de f en 1.

b) Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice N° 03 :

Soient $f(x) = \frac{1}{x+1}$ et $g(x) = \sqrt{x+1}$

- 1- Montrer que f et g sont dérivables en 0 puis calculer $f'(0)$ et $g'(0)$.
- 2- Déterminer les approximations affines de f et g au voisinage de 0.
- 3- Calculer $\sqrt{1,00002}$; $\sqrt{0,995}$; $\frac{1}{0,996}$ et $\frac{1}{1,008}$

Exercice N° 04 :

Soient f une fonction dérivable sur \mathbb{R} et a un réel.

- 1- Montrer que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{af(x) - xf(a)}{x - a} = af'(a) - f(a)$
- 2- En déduire $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{64x - 2(2x^2 - 6)^6}{x - 2}$

Exercice N° 05 :

Soit $f(x) = \begin{cases} x^2 + |x+2| - 1 & \text{si } x < 1 \\ (x-1)\sqrt{x-1} + 3x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- 1- Etudier la dérivabilité de f en (-2) et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
- 2- a) Montrer que f est dérivable en 1 et déterminer $f'(1)$.

b) En déduire $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+nh) - f(1)}{h}$; $n \in \mathbb{Z}^*$ puis calculer $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+3h) - f(1-2h)}{h}$

Exercice N° 06 :

Soit f la fonction définie par $f(x) = x^2 + 2xE(x) - 1$ et (\mathcal{C}) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

- 1- Montrer que f est continue en 0 .
- 2- a) Etudier la dérivabilité de f en 0^- et en 0^+ .
b) f est- elle dérivable en 0 ?

Exercice N° 07 :

Soit $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - 1} + 4 - x & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{(m+1)x^3 - 3x + m^2}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ x^2\sqrt{-x} + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$; $m \in \mathbb{R}$

- 1- Calculer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x)$
- 2- Etudier suivant le paramètre réel m , $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$
- 3- Etudier suivant le paramètre réel m la continuité de f en 1.
- 4- Etudier suivant le paramètre réel m la dérivabilité de f en 1.
- 5- On prend $m = 1$ et $x_0 \in]0, 1[$

a) Montrer que f est dérivable en x_0 .

b) Existe il un point de (C_f) d'abscisse x_0 où la tangente est parallèle à $(\Delta): 4x - y + 3 = 0$.

c) Existe il un point de (C_f) d'abscisse x_0 où la tangente est perpendiculaire à $(\Delta'): x - 3y - 3 = 0$.

Exercice N° 08 :

Soit $f(x) = x^2 - 2|x + 1|$

1- Etudier la dérivabilité de f en (-1) .

2- Dresser le tableau de variation de f et préciser la nature des extremas.

Exercice N° 09 :

Soit $f(x) = \frac{8x^2 - 3x}{4x^2 + 1}$

1- Dresser le tableau de variation de f .

2- En déduire que pour tout réel x , on a : $-\frac{1}{4} \leq f(x) \leq \frac{9}{4}$.

3- Calculer $f(1)$ et montrer que pour tout $x \in]0, 1[$, on a : $f\left(\frac{1}{x}\right) > 1$.

Exercice N° 10 :

Soit $f_a(x) = \frac{ax^2 - x + a + 1}{3x - 1}$; $a \in \mathbb{R}$

1- a) Calculer Soit $f'(x)$ pour tout Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{3}\right\}$.

b) Déterminer suivant les valeurs de a le nombre d'extrémum de f_a .

c) Dans le cas où f_a n'admet pas d'extrema, préciser son sens de variation.

2- a) Déterminer a pour que f_a admette un extrémum relatif en (-1) .

b) Dresser le tableau de variation de f_1 .

Exercice N° 11 :

Soit $f_m(x) = \frac{mx + 2 - m}{2x + m - 5}$; $m \in \mathbb{R}$; (ξ_m) la courbe représentative de f_m dans un plan

rapporté à un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- Déterminer m dans les cas suivants :

a) $(\Delta): y = 2$ est une asymptote horizontale à (ξ_m) .

b) $(\Delta'): x = 1$ est une asymptote verticale à (ξ_m) .

2- Etudier suivant les valeurs de m , les variations de f_m .

3- Montrer que pour tout réel m , pour lequel f_m n'est pas constante, (ξ_m) passe par deux points fixes A et B .

- 4- Soit I_m le point d'intersection des asymptotes de (ξ_m) . Quel est l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R} \setminus \{-1, 4\}$.
- 5- Tracer (ξ_1) .
- 6- En déduire la représentation graphique de $g : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{|x+1|}{2x+4}$