

I / Langage ensembliste-Langage probabiliste :

Définitions : * Lorsqu'on fait une expérience aléatoire, le résultat est appelé issue .

* L'ensemble des issues possibles est appelé univers des possibles.

* Un évènement est une partie de l'univers des possibles .

Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience, on a :

$\mathcal{P}(\Omega)$ est l'ensemble des parties ou évènements de Ω .

Langage ensembliste	Langage probabiliste
A : une partie de Ω	A est un évènement
$A = \Omega$	A est l'évènement certain
$A = \emptyset$	A est l'évènement impossible
e : un élément de Ω , $e \in \Omega$	e est une éventualité ou un cas possible
$\{e\}$ est un singleton, $\{e\} \subset \Omega$	$\{e\}$ est un évènement élémentaire
$A \cup B$ est la réunion de A et B	$A \cup B$ est l'évènement « A ou B »
$A \cap B$ est l'intersection de A et B	$A \cap B$ est l'évènement « A et B »
$\bar{A} = C_{\Omega}^A$ est le complémentaire de A dans Ω	\bar{A} est l'évènement contraire de A
Si $A \cap B = \emptyset$, A et B sont deux parties disjointes de Ω	A et B sont deux évènements incompatibles

II / Probabilité d'un évènement :

Définition : Soit Ω un ensemble fini, on appelle probabilité définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ toute application

$p : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0,1]$ tels que :

* $p(\Omega) = 1$

* Pour tout A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$, si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$

* On dit que p est une **équiprobabilité** sur $\mathcal{P}(\Omega)$ ou **probabilité uniforme** si tous les évènements élémentaires ont la même probabilité .

* Soit Ω un ensemble fini p l'équiprobabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$ pour tout évènement A de $\mathcal{P}(\Omega)$, la probabilité de A est :

$$p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)} = \frac{\text{nombre des cas favorables}}{\text{nombre des cas possibles}} .$$

Notation : Le cardinal d'un ensemble A noté $\text{card}(A)$ est le nombre d'éléments de A .

III / Propriétés :

Soit Ω un ensemble fini, p l'équiprobabilité sur $\mathcal{P}(\Omega)$:

❶ Pour tout évènement A de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a : $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

❷ $p(\emptyset) = 0$.

❸ Pour tout A et B de $\mathcal{P}(\Omega)$ on a : $\triangleright p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

$\triangleright p(A - B) = p(A) - p(A \cap B)$.

\triangleright Si $A \subset B \Rightarrow p(A) \leq p(B)$.



Exercice N°01 :

Une urne contient 4 boules rouges , 5 boules vertes et 3 boules blanches indiscernable au toucher .

- 1) On tire simultanément 2 boules de l'urne , calculer la probabilité des évènements suivants :
 - a) A : « avoir 2 boules blanches » .
 - b) B : « avoir deux couleurs » .
 - c) C : « avoir au moins une boule verte » .
- 2) On tire successivement et sans remise 2 boules de l'urne , calculer la probabilité des évènements suivants :
 - a) D : « avoir deux boules de même couleur » .
 - b) E : « avoir une seule boule verte » .
- 3) On inscrit le numéro (1) sur les boules rouges , (-1) sur les boules vertes et (0) sur les boules blanches
On tire successivement et avec remise 2 boules de l'urne ; On pose S : « la somme des numéros inscrits sur les boules tirées ».
 - a) Donner les valeurs possibles de S .
 - b) Calculer la probabilité de chaque valeur de S .
 - c) Vérifier que la somme de toutes ces probabilités est égale à 1 .

Exercice N°02 :

Une urne contient 10 boules indiscernables au touchées : six noire numérotées 1,1,2,2,2,3 et quatre blanches numérotées 1,1,2,3

- 1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :
 - a) A : « obtenir trois boules noires » .
 - b) B : « la somme des trois numéros inscrits sur les boules tirées est paire » .
 - c) C : « obtenir trois boules noires ou une somme paire » .
- 2) On tire successivement et avec remise trois boules de l'urne .Calculer la probabilité des évènements suivants :
 - a) D : « avoir exactement deux boules noires et une boule blanche » .
 - b) F : « avoir au moins une boule noire » .
 - c) E : « la boule n°2 est tirée pour la première fois au deuxième tirage ».

Exercice N°03 :

Une urne contient quatre boules blanches numérotées : -1,0,0,1 et cinq boules noires numérotées : -1,1,1,2,2 .

- 1) On tire simultanément et au hasard trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :
 - a) A : « obtenir trois boules de deux couleurs » .
 - b) B : « obtenir trois boules dont le produit des numéros est nul ».
 - c) C : « obtenir trois boules dont le produit est une puissance de 2 ».
 - d) D : « $A \cup B$ » .
 - e) E : « il reste dans l'urne le même nombre de boules blanches que de boules noires »
- 2) On tire successivement et sans remise trois boules de l'urne . Calculer la probabilité des évènements suivants :
 - a) F : « obtenir exactement deux boules blanches » .
 - b) G : « obtenir une somme nulle » .
- 3) On répartit les neuf boules dans neuf cases ,chaque case pouvant contenir de zéro jusqu'à neuf boules .
 - a) Calculer le nombre de répartition possible .
 - b) Calculer la probabilité des évènements suivants :

- H : « deux cases et deux seulement sont non vide » .
- K : « aucune case n'est vide ».
- L : « chaque couleur est dans une case ».

Exercice N°04 :

On considère une urne dans laquelle se trouve : 1 boule portant le numéro 1 , 2 boules portant le numéro 2 , 3 boules portant le numéro 3 et n boules portant le numéro n .

- 1) Combien l'urne contient elle de boule ?
- 2) On tire au hasard une boule de l'urne , tous les tirages sont supposés équiprobables.
 - a) On suppose que n est pair .Exprimer en fonction de n la probabilité pour que la boule tirée porte :
 - Un numéro pair .
 - Un numéro impair .
 - b) Dans cette question , on suppose seulement que le nombre totale de boules dans l'urne est 21 . Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ?

Exercice N°05 :

Une urne contient 6 boules : 3 numérotées 1 , 2 numérotées 2 et une numérotées 3 . On tire une première boule au hasard puis sans remettre cette boule on tire une seconde boule au hasard .

Le résultat d'un tel tirage est le couple (a, b) où a et b sont les nombres inscrits sur la première et la seconde boule .

- 1) Calculer la probabilité de chaque résultat possible .
- 2) Calculer la probabilité des évènements suivants :
 - A : « les deux numéros tirés sont égaux $(a = b)$ ».
 - B : « le premier nombre tiré est strictement supérieur au second $(a > b)$ » .
 - C : « le premier nombre tiré est inférieur au second $(a \leq b)$ » .
- 3) On note X la valeur absolue de la différence de deux nombres tirés $(X = |a - b|)$.
 - a) Quel est l'ensemble E des valeurs possibles de X .
 - b) Pour tout élément i de E , calculer la probabilité de l'évènement $(X = i)$.

Exercice N°06 :

Soit $(\Omega, P(\Omega), p)$ un espace probabilisé finie.

- 1) Montrer que si A, B et C sont trois évènements quelconques de $P(\Omega)$, on a :

$$p(A \cup B \cup C) = p(A) + p(B) + p(C) - p(A \cap B) - p(A \cap C) - p(B \cap C) + p(A \cap B \cap C)$$

- 2) a) Soient $A_{1 \leq i \leq n}$ n évènements quelconques de $P(\Omega)$. Montrer l'inégalité suivante :

$$p(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n p(A_i) \quad \text{①}$$

- b) Dans quel cas l'inégalité ① devient-elle une égalité ?

Fonction :

Fonctions	Ensemble de définition , continuité et dérivabilité	Période	Fonctions dérivées
$x \mapsto \sin(x)$	\mathbb{R}	2π	$x \mapsto \cos(x)$
$x \mapsto \cos(x)$	\mathbb{R}	2π	$x \mapsto -\sin(x)$
$x \mapsto \sin(ax + b) ; a \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}	$2\pi/ a $	$x \mapsto a \cos(ax + b)$
$x \mapsto \cos(ax + b) ; a \in \mathbb{R}^*$	\mathbb{R}	$2\pi/ a $	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$

Limite :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a ; (a \in \mathbb{R}) ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x} = 0 ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$$

Domaine d'étude :

Si une fonction f est périodique de période T alors D_E le domaine d'étude est $D_E = [a, a + T] \cap D_f$.

- Comment représenter $g : x \mapsto f(x) + b ; b \in \mathbb{R}$?

$$M(x, f(x)) \in (\xi_f) ; M'(x, f(x) + b) \in (\xi_g) \text{ donc } \overline{MM'} = b \vec{j} \text{ et par suite } (\xi_g) = \underline{t_{b\vec{j}}(\xi_f)}$$

- Comment représenter $g : x \mapsto f(x - a) ; a \in \mathbb{R}$? ; $(\xi_g) = \underline{t_{a\vec{i}}(\xi_f)}$

Point méthode :

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \frac{0}{0}$	<ol style="list-style-type: none"> 1 Simplification 2 Se ramener au théorème sur les limites 3 Utiliser le nombre dérivé 4 Changement de variable $h = x - a$
Signe d'une somme de termes hybride [<i>exemple</i> : $x + \sin(x) ; -x + \cos(x) ; \dots$]	Dresser le tableau de variation de f tel que $f(x)$ est l'expression dont on veut déterminer le signe
Déterminer un minimum ou un maximum de f	Etudier le signe de $f'(x)$



Exercice N°01 :

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{5x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x) - \sin(x)}{x} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(2x)}{1 - \cos(x)} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) ; \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x) - 1}{x - \frac{\pi}{2}} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x)}{x - \frac{\pi}{2}} ; \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) + \cos(x)}{x + \frac{\pi}{4}}$$

Exercice N°02 :

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par } f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2(\pi x)}{x - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue en 1 .
- 2) f est-elle dérivable en 1 ?

Exercice N°03 :

$$\text{Soit } f(x) = \frac{\sin(x) + |\sin x|}{2}$$

- 1) Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (ξ_f) .
- 2) Montrer que f est périodique de période 2π .
- 3) Etudier f et tracer la courbe représentative (ξ_f) de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Exercice N°04 :

$$\text{Soit } f(x) = \sin^2(x) - \sin(x) + 2$$

- 1) Etudier la fonction f .
- 2) Tracer (ξ_f) dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 3) Soit $g(x) = \cos^2(x) - \cos(x) + 2$; En utilisant (ξ_f) , tracer (ξ_g) (expliquer).

Exercice N°05 :

$$\text{Soit } f(x) = \sin(2x)$$

- 1) Etudier les variations de f sur un intervalle convenablement choisie .
- 2) Tracer la courbe représentative (ξ_f) de f dans un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) .
- 3) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Expliquer comment tracer la courbe (ξ_g) de g en utilisant (ξ_f) ?
- 4) Soit h la fonction définie sur \mathbb{R} par $h(x) = 2 - \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$. Tracer la courbe représentative (ξ_h) de h en utilisant (ξ_g) .

Exercice N°06 :

On donne la fonction f définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = a \sin(2x) + b(1 - \cos 2x)$; $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

1) Déterminer a et b sachant que f admet un extremum au point $x_0 = \frac{\pi}{6}$ et $f\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -3$.

2) Montrer alors que $f(x) = 2 \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 1$ pour tout $x \in [0, \pi]$.

3) a) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$.

b) Calculer $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et en déduire le signe de $f(x)$ sur $[0, \pi]$.

4) Soit $g: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$; $x \mapsto \frac{\sin(x)}{\sqrt{3} \sin(2x) - 2 \sin^2(x)}$.

Montrer que pour tout $x \in D_g$ on a : $g(x) = \frac{\sin(x)}{f(x)}$ et en déduire D_g .