



Énoncés

Exercice 1

Soit φ un cercle de centre $O(3, 1)$ et de rayon $\sqrt{5}$ et A le point de coordonnées $(4, 3)$.

Vérifiez que A est un point du cercle et déterminer l'équation de la tangente à Γ passant par A .

Exercice 2

$EFGH$ est un rectangle, avec $EH = a$ et $EF = \frac{3}{2}a$; M est le milieu de $[FG]$ et K est défini par $\overline{HK} = \frac{1}{3}\overline{HG}$; L est le projeté orthogonal de K sur (EM) .

1) Calculer, en fonction de a , les produits scalaires : $\overline{EF} \cdot \overline{EM}$ et $\overline{EH} \cdot \overline{KE}$.

2) Montrer que $\overline{EK} \cdot \overline{EM} = \frac{5a^2}{4}$.

3) En exprimant d'une autre façon le produit scalaire $\overline{EK} \cdot \overline{EM}$, en déduire la distance EL en fonction de a .

4) Déterminer une mesure en degrés de l'angle \widehat{KEM} .

Exercice 3

ABC est un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 5$ et $CA = 8$. On note H le pied de la hauteur issue de B et G le centre de gravité du triangle.

1) Calculer les angles de ce triangle.

2) Calculer le produit scalaire $\overline{AB} \cdot \overline{AC}$ et en déduire la longueur AH .

3) Exprimer \overline{AG} en fonction des vecteurs \overline{AB} et \overline{AC} , en déduire la longueur AG .

Exercice 4

Construire un triangle isocèle ABC tel que $AB = AC = 13$ et $BC = 10$. On note G son centre de gravité.

1) Calculer les longueurs AG , BG et GC .

2) Montrer que pour tout point M du plan on a $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$.

3) Déterminer et construire l'ensemble des points du plan tels que $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 194$

4) Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tels que $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 0$.

Exercice 5

1) Soient les points $A(1 ; 1)$ et $B(1 ; 0)$. Déterminer l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $MA^2 + MB^2 = 10$. Représenter cet ensemble.

2) Soit $A(5 ; 3)$ et $B(2 ; 4)$. Déterminer l'ensemble des points M du plan tels que $MA^2 - MB^2 = -2$. Tracez cet ensemble.

3) Soient A et B deux points du plan tels que $AB = a$. Déterminez l'ensemble des points M tels que $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = a^2$.

Corrections

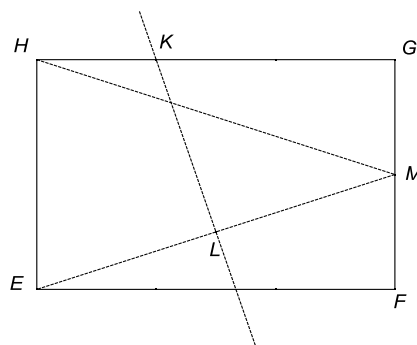
Exercice 1

L'équation de φ est $(x-3)^2 + (y-1)^2 = 5$.

Remplaçons \underline{x} et \underline{y} par les coordonnées de A : $(4-3)^2 + (3-1)^2 = 1+4=5$. Donc $A \in \varphi$

La tangente à φ passant par A est l'ensemble des points M du plan tels que $\overline{AM} \cdot \overline{AO} = 0$, soit en coordonnées : $\begin{pmatrix} x-4 \\ y-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 4x+3y-25=0$.

Exercice 2



$$1) \overline{EF} \cdot \overline{EM} = \overline{EF} \cdot \overline{EF} = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 = \frac{9}{4}a^2$$

$$\overline{EH} \cdot \overline{KE} = -\overline{EH} \cdot \overline{EH} = -a^2.$$

$$2) \overline{EK} \cdot \overline{EM} = (\overline{EH} + \overline{HK}) \cdot (\overline{EF} + \overline{FM}) = \overline{EH} \cdot \overline{EF} + \overline{HK} \cdot \overline{EF} + \overline{EH} \cdot \overline{FM} + \overline{HK} \cdot \overline{FM} = 0 + \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2}a + a \cdot \frac{1}{2}a + 0 = \frac{5a^2}{4}.$$

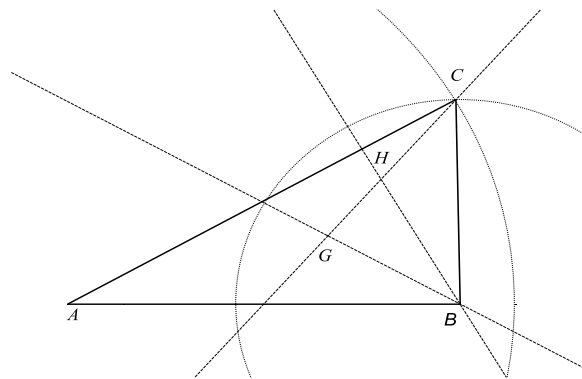
$$3) \text{ Par projection sur } (EM) : \overline{EK} \cdot \overline{EM} = \overline{EL} \cdot \overline{EM} = EL \cdot \sqrt{\frac{9}{4}a^2 + \frac{1}{4}a^2} = a \frac{\sqrt{10}}{2} \cdot EL$$

$$\text{donc } EL = \frac{5a^2}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{4} a.$$

$$4) EK = a \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ (avec Pythagore),}$$

$$\cos(\widehat{KEM}) = \frac{\overline{EK} \cdot \overline{EM}}{EK \cdot EM} = \frac{\frac{5a^2}{4}}{a \frac{\sqrt{5}}{2} a \frac{\sqrt{10}}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{KEM} = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 3



1) on a

$$\left\| \frac{\overline{CB} - \overline{CA}}{\overline{AB}} \right\|^2 = CA^2 + CB^2 - 2CA \times CB \times \cos \widehat{C}$$

$$\Rightarrow 7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \widehat{C} \Rightarrow \cos \widehat{C} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{C} \approx 60^\circ. \text{ De même on trouve}$$

$$\cos \widehat{A} = \frac{8^2 + 7^2 - 5^2}{2 \cdot 8 \cdot 7} = \frac{11}{14} \Rightarrow \widehat{A} \approx 31^\circ \text{ et } \widehat{B} \approx 89^\circ.$$

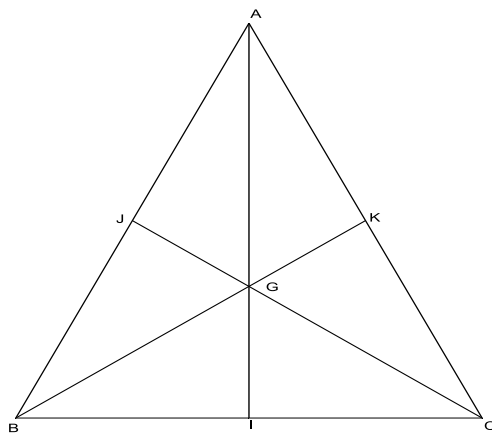
$$2) \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cdot \cos(\widehat{BAC}) = 7 \cdot 8 \cdot \frac{11}{14} = 44, \text{ par ailleurs } \overline{AB} \cdot \overline{AC} = AH \cdot AC \Rightarrow AH = \frac{44}{8} = 5,5.$$

$$3) \overline{AG} = \frac{2}{3} \overline{AI} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{2} \overline{AB} + \frac{1}{2} \overline{AC} \right) = \frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC}. \text{ On a alors}$$

$$AG^2 = \overline{AG}^2 = \left(\frac{1}{3} \overline{AB} + \frac{1}{3} \overline{AC} \right)^2 = \frac{1}{9} \overline{AB}^2 + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \overline{AB} \cdot \overline{AC} + \frac{1}{9} \overline{AC}^2 = \frac{1}{9} \cdot 49 + \frac{2}{9} \cdot 44 + \frac{1}{9} \cdot 64 = \frac{201}{9}.$$

$$\text{D'où } AG = \frac{\sqrt{201}}{3}.$$

Exercice 4



$AB = AC = 13$ et $BC = 10$, G le centre de gravité.

1) Avec Pythagore: $AI^2 = AB^2 - BI^2 = 169 - 25 = 144 \Rightarrow AI = 12 \Rightarrow AG = \frac{2}{3} \cdot 12 = 8$;

$$BG^2 = BI^2 + IG^2 = 25 + 16 = 41 \Rightarrow BG = CG = \sqrt{41} .$$

2) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = (\overline{MG} + \overline{GA})^2 + (\overline{MG} + \overline{GB})^2 + (\overline{MG} + \overline{GC})^2$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 + 2\overline{MG} \underbrace{(\overline{GA} + \overline{GB} + \overline{GC})}_0$$

$$= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

3) $MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + 64 + 41 + 41 = 3MG^2 + 146$ donc l'ensemble de points cherché est l'ensemble des points M tels que $3MG^2 + 146 = 194 \Leftrightarrow MG^2 = 16 \Leftrightarrow MG = 4$, soit le cercle de centre G , de rayon 4.

4) $2MA^2 - MB^2 - MC^2 = 2MA^2 - MA^2 - 2\overline{MA} \cdot \overline{AB} - AB^2 - MA^2 - 2\overline{MA} \cdot \overline{AC} - AC^2 = -2\overline{MA}(\overline{AB} + \overline{AC}) - 338$

L'ensemble cherché est l'ensemble des points M tels que $\overline{MA}(2\overline{AI}) = -169 \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot \overline{AI} = \frac{169}{2}$.

On se place dans le repère (A, \overline{AI}) où le point M a pour abscisse x tel que $x = \frac{169}{2}$; c'est la droite perpendiculaire à (AI) passant par ce point.

Exercice 5

1) $A(1 ; 1), B(1 ; 0)$; $MA^2 + MB^2 = (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-x)^2 + (-y)^2 = 2x^2 + 2y^2 - 4x - 2y + 3 = 10$. On

cherche donc les points tels que $x^2 + y^2 - 2x - y = \frac{7}{2} \Leftrightarrow (x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{7}{2} + 1 + \frac{1}{4} = \frac{19}{4}$. C'est le

cercle de centre $C(1 ; 1/2)$ et de rayon $\frac{\sqrt{19}}{2}$.

2) $A(5 ; 3), B(2 ; 4)$. $MA^2 - MB^2 = (5-x)^2 + (3-y)^2 - (2-x)^2 - (4-y)^2 = 14 - 6x + 2y$. L'ensemble cherché est la droite d'équation $14 - 6x + 2y = -2 \Leftrightarrow 3x - y - 8 = 0$.

3) $AB = \underline{a}$. $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \begin{pmatrix} x_A - x \\ y_A - y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_B - x \\ y_B - y \end{pmatrix} = x^2 + y^2 - (x_A + x_B)x - (y_A + y_B)y + x_A x_B + y_A y_B$. Prenons le centre du repère en I , milieu de $[AB]$, les coordonnées $A(-p ; 0)$ et $B(p ; 0)$ où $p = \underline{a/2}$; on a alors $x^2 + y^2 = p^2 + a^2 = \frac{a^2}{4} + a^2 = \frac{5}{4}a^2$, soit le cercle de centre I et de rayon $a \frac{\sqrt{5}}{2}$.