Définition : *Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On désigne par A et B les points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$.*

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u}.\vec{v}$, le réel ainsi défini :

* $\vec{u}.\vec{v}=OA.OB.\cos\widehat{AOB}$, *si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls.*
* $\vec{u}.\vec{v}=0$, *si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.*

Conséquence : *pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u}.\vec{u}=\|\vec{u}\|^2$ et on l'appelle carré scalaire de $\vec{u}$.*

Propriétés : *pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :*

* $\vec{u}\vec{v}=\vec{v}\vec{u}$
* $(\alpha\vec{u})\vec{v}=\alpha.(\vec{u}\vec{v})$
* $\vec{u}.(\alpha\vec{v})=\alpha.(\vec{u}\vec{v})$
* $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v})=\alpha\beta(\vec{u}\vec{v})$
* $\vec{u}(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\vec{v}+\vec{u}\vec{w}$
* $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2-2\vec{u}\vec{v}$
* $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2=\|\vec{u}\|^2+\|\vec{v}\|^2+2\vec{u}\vec{v}$

Vecteurs orthogonaux :

Définition : *deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux si leurs produit scalaire est nul et on note $\vec{u}\perp\vec{v}$.*

Conséquence : *deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.*

Produit scalaire et projection orthogonale :

Propriété : *Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et O, A et B des points tels que $\vec{u}=\overrightarrow{OA}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{OB}$; Si H est le projeté orthogonal de B sur (OA), alors*

$$\vec{u}\vec{v}=\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH}=\begin{cases} OA.OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de meme sens.} \\ -OA.OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de sens contraire.} \end{cases}$$

Vecteurs colinéaires :

Propriété : *pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :*

* $|\vec{u}\vec{v}|\le\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
* $|\vec{u}\vec{v}|=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$, si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Expression analytiques du produit scalaire dans un repère orthonormé :

- **Base orthonormée** : *Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan ; On dit que $(\vec{i},\vec{j})$ est une base orthonormée du plan si et seulement si* $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ et $\vec{i}\perp\vec{j}$.
- **Théorème** : *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. Dans une base orthonormée, si* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}\vec{v}=x\,x'+y.y'$
- **Conséquence** : *Dans une base orthonormée,* $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ *alors on a :*

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2} \quad ; \quad \vec{u}\perp\vec{v} \Leftrightarrow x\,x'+y.y'=0.$$

Distance d'un point à une droite :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right),(\Delta): ax+by+c=0$; $(a,b)\neq(0,0)$. *La distance du point*

$A\left(x_A,y_A\right)$ *à la droite* (Δ) *est* $\boxed{d\left(A,\Delta\right)=\dfrac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

Aire d'un triangle :

Soit ABC *un triangle, on pose* $BC=a$; AC=b ; AB=c. S *désigne l'aire du triangle* ABC *, on a :*

$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}}.$$

Loi du sinus :

- *Soit* ABC *un triangle, , on pose* $BC=a$; AC=b ; AB=c, *on a :*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}}$$

- S *désigne l'aire du triangle* ABC *et* R *désigne le rayon de son cercle circonscrit, on :*

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}=2R=\frac{abc}{2S}}$$

☆☆☆☆☆

Exercice N° 01 :

Dire si les affirmations suivantes est vraie ou fausse et justifier votre réponse.

1- *Si* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *sont colinéaires alors* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$

2- *Si* $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ *alors* $\vec{u}=\vec{0}$ ou $\vec{v}=\vec{0}$

3- *Si* $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{u}\cdot\vec{w}$ *alors* $\vec{v}=\vec{w}$

Exercice N° 02 :

Le plan $\mathcal{P}$ *est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$*, soit* $A(-2,1)$; $B\left(\frac{3}{2},\frac{-1}{2}\right)$; $C(3,2)$

Calculer de deux façons $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *et en déduire une valeur approchée en degrés de l'angle* $B\widehat{A}C$.

Exercice N° 03 :

1- *Déterminer les réels* α *pour que les vecteurs* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *soient orthogonaux :*

a) $\vec{u}\begin{pmatrix}\alpha+2\\1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\1-\alpha\end{pmatrix}$

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}3\alpha-2\\\alpha+1\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}\alpha\\2\end{pmatrix}$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}-\sin(\alpha)\\\cos(\alpha)+\sin(\alpha)\end{pmatrix}$

2- *Soient* $\vec{u}$ et $\vec{v}$ *deux vecteurs du plan tel que* $\|\vec{u}\|=2$; $\|\vec{v}\|=4$ *et* $\left(\widehat{\vec{u},\vec{v}}\right)=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$; $k\in\mathbb{Z}$

Déterminer le réel β *tel que :*

a) $\vec{u}\left(\vec{u}-2\beta\vec{v}\right)=5$

b) $\left(\vec{u}+\beta\vec{v}\right)\left(\vec{v}+\beta\vec{u}\right)=0$

Exercice N° 04 :

Soit A *et* B *deux points du plan tel que* $AB=4$

1- *Placer sur la droite* (AB) *le point* H *tel que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BH}=3$

2- *En déduire l'ensemble des points* M *du plan tels que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BM}=3$

3- *Déterminer l'ensemble des points* M *du plan dans chacun des cas suivants :*

a) $MA^2-MB^2=5$

b) $MA^2+MB^2=2$

c) $2MA^2-MB^2=-1$

Exercice N° 05 :

Soit I *le milieu d'un segment* $[AC]$, J *celui d'un segment* $[BD]$.

1- *Montrer que* $AB^2+AD^2+CD^2+CB^2=AC^2+BD^2+4IJ^2$

2- *Enoncer le résultat géométrique qu'on en déduit en examinons le cas* $I=J$.

Exercice N° 06 :

Soit ABC *un triangle équilatéral de coté* a

1- *Déterminer l'ensemble* Δ_1 *des points* M *du plan tel que* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AM}=\dfrac{a^2}{2}$

2- *Déterminer l'ensemble* Δ_2 *des points* M *du plan tel que* $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AM}=\dfrac{a^2}{2}$

3- *Soit* $G=\Delta_1\cap\Delta_2$ *; Qu'est ce qu'il représente le point* G *pour le triangle* ABC *?*

Exercice N° 07 :

1- *Démontrer en utilisant une (ou des) formule(s) trigonométrique(s) adaptée(s) que :*

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{1}{4}\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$$

2- *On considère un triangle* ABC *tel que* $BC=4$; $\widehat{B}=\dfrac{\pi}{4}$ *et* $\widehat{C}=\dfrac{\pi}{3}$.

Montrer que $AB=\dfrac{8\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$ *et* $AC=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$

Exercice N° 08:

Le plan $\mathcal{P}$ *est muni d'un repère orthonormé* $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ *d'unité* $1cm$ *, dans ce repère on donne les points*

$A(2,2)$; $B(-3,-1)$ *et* $C(6,-4)$, *ainsi que les vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$. *On appelle* (Δ) *la droite passant par*

A *et de vecteur directeur* $\vec{u}$, *et* (Δ') *la droite passant par* B *et de vecteur normal* $\vec{v}$.

1- *a) Déterminer les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{CA}$ *et* $\overrightarrow{CB}$.

b) Montrer que le point C *appartient à la droite* (Δ).

c) Montrer que le point C *appartient à la droite* (Δ').

2- *On note* $\alpha=A\widehat{C}B$.

a) Calculer $\cos(\alpha)$

b) En déduire une valeur approchée de α *à* 10^{-1} *prés (en degrés).*

3- *On note* H *le projeté orthogonal de* A *sur* (BC).

a) Calculer CH *puis* AH .

b) En déduire l'aire du triangle ABC .

Exercice N° 09:

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- Démontrer que les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ sont $\vec{u}.\vec{i}$ et $\vec{u}.\vec{j}$.

2- Soit $\vec{e}_1=\frac{4}{5}\vec{i}+\frac{3}{5}\vec{j}$; $\vec{e}_2=-\frac{3}{5}\vec{i}+\frac{4}{5}\vec{j}$ et $\vec{u}=-2\vec{i}+3\vec{j}$

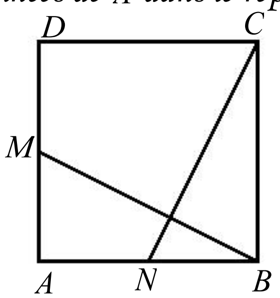
a) Vérifier que $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$ est une base orthonormée du plan .

b) Calculer les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

c) Soit $A(-1,2)$ et $\Omega(2,3)$ dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$. Trouver les coordonnées de A dans le repère $\left(\Omega,\vec{e_1},\vec{e_2}\right)$.

Exercice N° 10:

Dans la figure ci-contre , $ABCD$ est un carré de coté 1 ; $M=A*D$ et $N=A*B$ .En utilisant un repère orthonormé convenablement choisi , démontrer que $(BM)\perp(CN)$



Exercice N° 11:

On considère un quadrilatère convexe $ABCD$ et on appelle O le point d'intersection de ses diagonales .

démontrer que son aire est égale à : $\frac{1}{2}\times AC\times BD\times\sin\widehat{AOB}$

Exercice N° 12:

On considère un triangle quelconque ABC et on pose $BC=a$; $AC=b$ et $AB=c$; on note $p=\frac{a+b+c}{2}$ le demi-périmètre. Le but de cet exercice est d'exprimer l'aire S du triangle ABC en fonction de a , b et c .

1- Prouver que $\cos\widehat{A}=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

2- En déduire que $\sin^2\widehat{A}=\frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{4b^2c^2}$

3- Montrer que $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Exercice N° 13:

D'un point Ω intérieur à un cercle (ξ) de rayon R , on mène deux droites perpendiculaires qui rencontrent le cercle (ξ) en A et A' d'une part et en B et B' d'autre part. On note I le milieu du segment $[A'B']$
Il s'agit de montrer que la médiane issue de Ω dans le triangle $\Omega A'B'$ est hauteur du triangle ΩAB

1- Faire une figure.

2- a) Démontrer $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{\Omega A'}=\overrightarrow{\Omega B}.\overrightarrow{\Omega B'}$

b) Conclure