| Série d'exercices *** $3^{\text{ème}}$ M<br>PRODUIT SCALAIRE | Lycée Secondaire Ali Zouaoui<br>" Hajeb Laayoun " |
|---|---|

***Définition :***

Soit $O$ un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs . On désigne par $A$ et $B$ les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ .

On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ , le réel ainsi défini :

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA.OB.\cos\widehat{AOB}$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls .
* si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

***Conséquence*** :

pour tout vecteur $\vec{u}$ , $\vec{u}\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ et on l'appelle carré scalaire de $\vec{u}$ .

***Propriétés :***

pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ on a :

| | |
|---|---|
| $\vec{u}\,\vec{v} = \vec{v}\,\vec{u}$ | $\vec{u}.(\alpha\vec{v}) = \alpha.(\vec{u}\,\vec{v})\,;\alpha \in \mathbb{R}$ |
| $(\alpha\vec{u})\vec{v} = \alpha.(\vec{u}\,\vec{v})$ | $\vec{u}(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\,\vec{v} + \vec{u}\,\vec{w}$ |
| $(\alpha\vec{u}).(\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}\,\vec{v})$ ; $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ | |
| $\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u}\,\vec{v}$ | $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u}\,\vec{v}$ |

***Vecteurs orthogonaux :***

***Définition*** : deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dit orthogonaux (on note $\vec{u} \perp \vec{v}$ )si leurs produit scalaire est nul.

***Conséquence*** : deux droites sont perpendiculaires , si et seulement si le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

***Produit scalaire et projection orthogonale :***

***Propriété*** : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls et $O$ ,$A$ et $B$ des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ ; Si $H$ est le projeté orthogonal de $B$ sur $(OA)$ ,alors

$$\vec{u}\,\vec{v} = \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OH} = \begin{cases} OA.OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de même sens.} \\ -OA.OH & \text{si } \overrightarrow{OA} \text{ et } \overrightarrow{OH} \text{ sont colinéaires et de sens contraire.} \end{cases}$$

***Vecteurs colinéaires :***

***Propriété :*** pour tout vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ on a :

* $|\vec{u}\,\vec{v}| \le \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy-Schwarz) .
* $|\vec{u}\,\vec{v}| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|$ , si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.
* $\|\vec{u} + \vec{v}\| \le \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Minkowski)

***Expression analytiques du produit scalaire dans un repère orthonormé :***

- ***Base orthonormée :*** Soient $\vec{i}$ et $\vec{j}$ deux vecteurs non nuls du plan ; On dit que $\left(\vec{i}\ ,\vec{j}\right)$ est une base orthonormée du plan si et seulement si : $\left\|\vec{i}\right\|=\left\|\vec{j}\right\|=1$ et $\vec{i}\perp\vec{j}$.
- ***Théorème :*** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan . Dans une base orthonormée , si $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors $\vec{u}.\vec{v}=x.x'+y.y'$
- ***Conséquence :*** Dans une base orthonormée , $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ alors on a :

$$\left\|\vec{u}\right\|=\sqrt{x^2+y^2}\ ;\ \vec{u}\perp\vec{v}\Leftrightarrow x.x'+y.y'=0.$$

***Distance d'un point à une droite :***

Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$,$(\Delta):ax+by+c=0$ ; $(a,b)\neq(0,0)$ .

La distance du point $A\left(x_A,y_A\right)$ à la droite $(\Delta)$ est $\boxed{d\left(A,\Delta\right)=\dfrac{\left|ax_A+by_A+c\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$

***Aire d'un triangle :***

Soit $ABC$ un triangle , on pose $BC=a$ ; AC=b ; AB=c. $S$ désigne l'aire du triangle $ABC$ , on a :

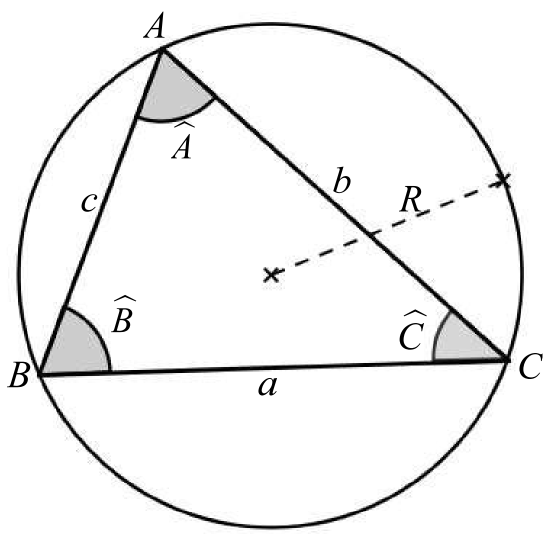
$$\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\widehat{C}=\frac{1}{2}bc\sin\widehat{A}=\frac{1}{2}ac\sin\widehat{B}}.$$

***Loi du sinus :***

- Soit $ABC$ un triangle , , on pose $BC=a$ ; AC=b ; AB=c, on a :

$$\boxed{\frac{a}{\sin\widehat{A}}=\frac{b}{\sin\widehat{B}}=\frac{c}{\sin\widehat{C}}}$$

- $S$ désigne l'aire du triangle $ABC$ et $R$ désigne le rayon de son cercle circonscrit , on : $\boxed{\dfrac{a}{\sin\widehat{A}}=\dfrac{b}{\sin\widehat{B}}=\dfrac{c}{\sin\widehat{C}}=2R=\dfrac{abc}{2S}}$



**_Exercice N° 01 :_**

Soit $ABC$ un triangle isocèle en $A$. On note $I$ le milieu de $[BC]$ et $H$ le projeté orthogonal de $I$ sur $(AC)$.

1- Montrer que $\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AI}.\overrightarrow{CH}$

2- a) Calculer $\overrightarrow{AH}\left(\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}\right)$

   b) En déduire que $\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HC}$

3- a) A l'aide des résultats précédents , montrer que $\left(\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{AH}\right).\overrightarrow{BH}=0$

   b) En déduire que $(AJ)\perp(BH)$ avec $J=I*H$

**Exercice N° 02 :**

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, soient $A\begin{pmatrix}\frac{3}{2},\frac{3}{2}\end{pmatrix}$ ; $B\begin{pmatrix}\frac{1}{2},\frac{1}{2}\end{pmatrix}$

et $C\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2},1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

1- a) Calculer $AB$ ; $AC$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$

   b) En déduire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$ et $\sin\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)$

2- Quelle est la nature du triangle $ABC$ .

**Exercice N° 03 :**

Soient $A$ et $B$ deux points du plan $\mathscr{P}$ tel que $AB=5$.

Déterminer les ensembles suivants :

a) $\Gamma_1=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ MA^2-MB^2=-5\right\}$

b) $\Gamma_2=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ MA^2+MB^2=-4\right\}$

c) $\Gamma_3=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=-\frac{9}{4}\right\}$

d) $\Gamma_4=\left\{M\in\mathscr{P}\ /\ MA=3MB\right\}$

**Exercice N° 04 :**

Soient $A$ , $B$ et $C$ trois points du plan tels que $AB=5$ ; $AC=8$ et $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=20$

1- Quelle est la valeur de $\widehat{BAC}$ ?

2- Calculer $BC$ et $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$

3-a) Soit $I=B*C$ , montrer que pour tout point $M$ du plan , on a :

$$\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=MI^2-\frac{BC^2}{4}$$

   b) En déduire l'ensemble ($\mathscr{C}$) des points $M$ du plan tel que $\overrightarrow{MB}.\overrightarrow{MC}=20$

## Exercice N° 05 :

Soient $ABCD$ un carré de coté $a$, $I = A * D$ , $J = C * D$ et $\alpha$ une mesure en degré de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BJ}}\right)$.

1- a) Montrer que $BI = BJ = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$

b) En déduire que $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = \dfrac{5}{4}a^2\cos(\alpha)$

2- a) Montrer que $\overrightarrow{BI} = -\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

b) Déterminer deux réels $n$ et $m$ tel que $\overrightarrow{BJ} = n\,\overrightarrow{AB} + m\,\overrightarrow{AD}$

c) En déduire que $\overrightarrow{BI}.\overrightarrow{BJ} = a^2$

3- Déduire de 1- et 2- une valeur approchée de $\alpha$ à un degré prés.

## Exercice N° 06 :

Soit ($\mathscr{C}$ ) un cercle de centre $O$ et de rayon $R$ .On place sur ($\mathscr{C}$ ) quatre points $A$ , $A'$, $B$ et $B'$ tel que $(AA') \perp (BB')$.Soient $\{I\} = (AA') \cap (BB')$ et $A'' = S_O(A)$

1- Faire une figure

2- a) Montrer que $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA''} = IO^2 - R^2$

b) En déduire $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA'}$ et $\overrightarrow{IB}.\overrightarrow{IB'}$

3- a) Calculer $\left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB}\right)\overrightarrow{A'B'}$

b) En déduire que la médiane issue de $I$ du triangle $IAB$ est aussi une hauteur du triangle $IA'B'$