

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$

Définition: On appelle rotation de centre Ω et d'angle θ et on la note $R_{(\Omega, \theta)}$

l'application du plan dans lui-même qui fixe Ω et qui a tout point M du plan distinct de Ω , associe le point M'

$$\text{tel que: } \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases}$$

Remarques :

- Si $\theta \equiv 0 [2\pi]$ alors $R = Id$
- Si $\theta \equiv \pi [2\pi]$ alors $R = S_{\Omega}$ (symétrie central de centre Ω)
- Si $\theta \in [0, \pi]$ on dit que R est une rotation directe.
- Si $\theta \in]-\pi, 0[$ on dit que R est une rotation indirecte.

Détermination d'une rotation : Une rotation est parfaitement déterminée par la donnée de son angle et celle d'un point et son image.

Réciproque d'une rotation : La rotation $R_{(\Omega, \theta)}$ est une bijection et sa réciproque est

$$R_{(\Omega, \theta)}^{-1} = R_{(\Omega, -\theta)}$$

Propriétés d'une rotation:

Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$, $C \neq D$, $R(A) = A'$, $R(B) = B'$ et $R(D) = D'$. (R est la rotation de centre Ω et d'angle θ).

- Toute rotation conserve le produit scalaire et les distances.
- Si on a : $\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{A'B'} = k \overrightarrow{C'D'}$; $k \in \mathbb{R}$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'} \right) \equiv \theta [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'} \right) [2\pi]$
- L'image d'une droite par une rotation est une droite.
- L'image d'un segment par une rotation est un segment qui lui est isométrique.
- Une rotation conserve le barycentre de deux points.
- Une rotation conserve le parallélisme et l'orthogonalité de deux droites.
- L'image d'un cercle par une rotation est un cercle qui lui est isométrique et de centre l'image du centre .
- Une rotation conserve le contact.

Définition d'une isométrie : Soit f une application du plan dans lui-même, on dit que f est une isométrie du plan si pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $MN = M'N'$.

Théorème : Soient A, B, C et D quatre points du plan tels que $A \neq B$, $AB = CD$ et $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{CD}$, il existe une unique rotation R tel que $R(A) = C$ et $R(B) = D$, d'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right)$ et de centre appartenant aux médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$.

Composé de deux rotations : $R_{(\Omega, \theta)} \circ R_{(\Omega, \theta')} = R_{(\Omega, \theta + \theta')}$

Expressions analytiques d'une rotation :

Le plan \mathcal{P} est muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit $\Omega(a, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2, M(x, y)$ et $M'(x', y') = R_{(\Omega, \theta)}(M)$, les expressions analytiques de

$$R_{(\Omega, \theta)} \text{ sont données par } \begin{cases} x' = a + (x - a)\cos(\theta) - (y - b)\sin(\theta) \\ y' = b + (x - a)\sin(\theta) + (y - b)\cos(\theta) \end{cases}$$

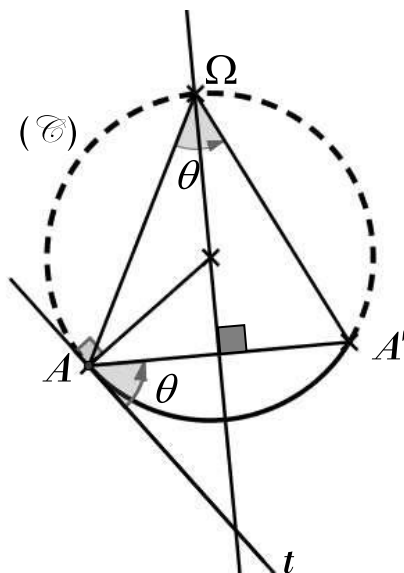
Construction du centre d'une rotation :

1^{er} cas : Soit R la rotation de centre Ω et d'angle θ ($\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$) tel que $R(A) = A'$

$$R(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega A = \Omega A' \\ \left(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega A'}\right) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \text{ donc } \Omega \in \text{méd}[AA'] \cap (\mathcal{C}) \text{ avec } (\mathcal{C}) = \widehat{AA'} \setminus \{A, A'\}$$

situé dans le demi plan de frontière (AA') ne contenant pas la demi droite $[At)$ tel que

$$\left(\overrightarrow{At}, \overrightarrow{AA'}\right) \equiv \theta [2\pi]$$



2^{ème} cas :

Soit R une rotation tels que $R(A) = A'$ et $R(B) = B'$ donc l'angle de R est

$$\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) [2\pi]$$

➤ $\theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $(\Delta) = \text{méd}[AA']$ et $(\Delta') = \text{méd}[BB']$

* Si (Δ) et (Δ') sont sécantes alors le centre Ω de la rotation est l'intersection de (Δ) et (Δ') .

* Si (Δ) et (Δ') sont confondues alors $\{\Omega\} = (AB) \cap (A'B')$



Exercice N° 01 :

Dans un plan orienté \mathcal{P} , on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que

$$(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

Soit R la rotation de centre B et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

- 1- a) Déterminer l'image de C par R
- b) Soit E le symétrique de D par rapport à A . Montrer que E est l'image de D par R .
- c) soit F le symétrique de D par rapport à C . Déterminer l'image de F par R .
- 2- On désigne par O' le milieu de $[BE]$.

Montrer que $OF = O'D$ et que O est l'orthocentre du triangle DFO' .

Exercice N° 02 :

Dans un plan orienté \mathcal{P} , on considère un triangle équilatéral ABC inscrit dans un cercle (\mathcal{C}) de centre O tel que $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On désigne par I, J et K les milieux respectifs des segments $[BC], [AC]$ et $[AB]$.

Soit R la rotation qui transforme A en B et J en K .

- 1- Déterminer le centre et une mesure de l'angle de R .
- 2- Déterminer les images de K et de I par R .
- 3- On désigne par D le point de (\mathcal{C}) diamétralement opposé à A .

Soit R_1 la rotation de centre D et d'angle $(-\frac{2}{3}\pi)$.

- a) Montrer que $R_1(B) = C$.
- b) Soit A' l'image de A par R_1 .

Montrer que A' est le symétrique de A par rapport à C .

- 4- Soit M un point du plan \mathcal{P} distinct de A .

On pose $M' = R_1^{-1}(M)$ et $M'' = R(M)$. Montrer que $\overrightarrow{M''M'} = \overrightarrow{AB}$.

Exercice N° 03 :

Dans un plan orienté \mathcal{P} , on considère deux points distincts B et C .

Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ transformant B en C .

- 1- Déterminer et construire le centre Ω de R .
- 2- On désigne par (\mathcal{C}) le cercle circonscrit au triangle ΩBC et par O son centre.

Soit M un point de (\mathcal{C}) et M' son image par R .

Montrer que les points M, M' et C sont alignés.

3- Soit C' l'image de C par R .

a) Construire le cercle (\mathcal{C}') image de (\mathcal{C}) par R .

b) La droite $(\Omega C')$ recoupe (\mathcal{C}) en J .

Montrer que la droite (CJ) passe par le centre O' du cercle (\mathcal{C}') .

(on pourra utiliser J' image de J par R)

4- Les droites (BJ) et (ΩC) se coupent en K .

a) Montrer que J est l'image de K par R .

b) Montrer que $BKC'C$ est un losange.

c) Montrer que les points K, J, C et C' sont cocycliques.

Exercice N° 04 :

$ABCD$ est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

On construit le triangle équilatéral BEC tel que $\left(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{BC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

1- Construire l'ensemble : $(\Gamma) = \left\{M \in \mathcal{P} / \left(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]\right\}$

2- Construire le point Ω définie par : $\left\{\begin{array}{l} \Omega A = \Omega C \\ \left(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega A}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi] \end{array}\right.$

3- Soit R la rotation de centre Ω et d'angle $\frac{2\pi}{3}$. Montrer que $R(E) = D$.

Exercice N° 05 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère les points

$A(2,0), B(4,1), C(1,2)$ et $D(0,4)$

1- Montrer qu'il existe une unique rotation R qui transforme A en C et B en D .

2- Déterminer θ (l'angle de R).

3- Donner les coordonnées de Ω (centre de R).

Exercice N° 06 :

Le plan P est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{i}, \vec{j}) , on considère la droite

$(\Delta): x + y - 1 = 0$.

Déterminer une équation cartésienne de (Δ') image de (Δ) par $R_{\left(0, \frac{\pi}{3}\right)}$.

Exercice N° 07 :

Le plan \mathcal{P} est orienté et muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Soit f l'application de \mathcal{P} dans \mathcal{P} qui à tout $M(x, y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que :

$$\begin{cases} x' = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + \sqrt{3} + \frac{1}{2} \\ y' = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \end{cases}$$

1- Montrer que f est une isométrie de \mathcal{P}

2- Montrer que f admet un unique point invariant Ω que l'on déterminera.

3- Caractériser f

Exercice N° 08 :

Soient (\mathcal{C}) un cercle de centre O et de rayon r , A est un point fixe de (\mathcal{C}) , B et C deux

points variables de $(\mathcal{C}) \setminus \{A\}$ tel que $\left(\widehat{AB}, \widehat{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Soit $M = S_{(AC)}(B)$. Montrer que lorsque les points B et C varient le point M décrit un cercle que l'on précisera.

Exercice N° 09 :

Le plan \mathcal{P} est orienté et muni d'un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1- Soit $M(x, y) \in \mathcal{P}$ et $M'(x', y') \in \mathcal{P}$ tel que $M' = R_{(\Omega, \alpha)}(M)$ avec $\Omega(a, b); (a, b) \in \mathbb{R}^2$

On pose $l = \Omega M$ et $\left(\vec{i}, \widehat{\Omega M}\right) \equiv \beta[2\pi]$.

a) Montrer que $x - a = l \cos \beta$ et $y - b = l \sin \beta$.

b) Montrer que $x' - a = l \cos(\alpha + \beta)$ et $y' - b = l \sin(\alpha + \beta)$.

c) En déduire que : $M' = R_{(\Omega, \alpha)}(M) \Rightarrow \begin{cases} x' = a + (x - a) \cos \alpha - (y - b) \sin \alpha \\ y' = b + (x - a) \sin \alpha + (y - b) \cos \alpha \end{cases}$

2- On pose $R_n = R_{\left(O, \frac{\pi}{2^n}\right)}$; $n \in \mathbb{N}$

Soit $M_0(a_0, b_0)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n(a_n, b_n) = R_n(M_{n-1}(a_{n-1}, b_{n-1}))$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $M_n = R_{\left(O, \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\pi\right)}(M_0)$.

b) En déduire a_n et b_n en fonction de n , a_0 et b_0 .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n$.