Exercice n°1

Soit U la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 9 \\ U_{n+1} = \dfrac{8U_n - 6}{U_n + 1} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que $\forall\ n \in$ IN $U_n \geq 6$

b) montrer que $\forall\ n \in$ IN on a $U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(6 - U_n)}{U_n + 1}$

c) En déduire que la suite U est décroissante

2) a) Montrer que $\forall n \in$ IN $U_{n+1} - 6 \leq \dfrac{2}{7}(U_n - 6)$

b) Montrer par récurrence que $\forall\ n \in$ IN: $U_n - 6 \leq 3(\dfrac{2}{7})^n$

c) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

3) on pose $S_n = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1} U_k$. Montrer que $6 \leq S_n \leq 6 + \dfrac{21}{5n}(1 - (\dfrac{2}{7})^n)$ et déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$

Exercice n°2 :

A] On considère $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{2}}$ définie sur $[\ 0\ ; +\infty\ [$

1°) Démontrer que si $0 \leq x \leq 1$ alors $0 \leq f(x) \leq 1$

2°) Démontrer que $f(x) - x = \dfrac{-2x^2 + x + 1}{2\left(\sqrt{\dfrac{1+x}{2}} + x\right)}$ (*on peut l'admettre si on n'arrive pas à le démontrer*) et étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [\ 0\ ;\ 1\ ]$

B] On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+U_n}{2}}$

1°) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $0 \leq U_n \leq 1$

2°) Etudier le sens de variation de (U_n)

3°) On rappelle la formule très connue $\cos(2a) = 2(\cos a)^2 - 1$

a) Démontrer que l'on a $\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}} = \cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$ pour $x \in [\ 0\ ;\ \pi\ ]$

b) Démontrer par récurrence que si $n \geq 0$ on a $U_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$

c) Conclure pour la limite de (U_n)

***Exercice** n°3 :*

Soit la suite U définie par : $\begin{cases} U_0 = \cos\theta \\ U_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+\cos\theta}{2}} \end{cases}$ $\theta \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

1) Montrer que $U_1 = \cos\dfrac{\theta}{2}$
2) a) montrer que $\forall\, n \in$ IN , $0 \leq U_n \leq 1$
   b) montrer que U est croissante
   c) en déduire quelle est convergente.
3) a) montrer que $\forall\, n \in$ IN : $U_n = \cos(\dfrac{\theta}{2^n})$

   b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$

***Exercice** n°4 :*

Soit la fonction h définie sur IR par : $h(x) = x^3 - x^2 + 3x - 1$

1) a) montrer que l'équation h(x) = 0 admet une unique solution x_0 telle que $\dfrac{1}{3} \prec x_0 \prec 1$

   b) déterminer le signe de h(x) sur IR.
2) soit la fonction f définie sur IR par : $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2+3}$

   étudier les variation de f
3) Soit U la suite définie sur IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$
4) a) montrer que $\forall\, n \in$ IN , $0 \leq U_n \leq x_0$
   b) montrer que U est croissante
   c) en déduire quelle est convergente.