

Feuille d'exercices 18 : Trigonométrie



1. Pour tout réel x on pose $\mathcal{A}(x) = \sin(3x) + \sin(x)$.

(a) Montrer que pour tous réels a et b on a :

$$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a) \cdot \cos(b).$$

(b) Prouver que $\mathcal{A}(x) = 2\sin(2x) \times \cos(x)$.

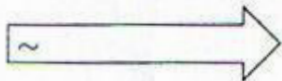
(c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. Soit $f(x) = \frac{\sin(4x)}{\sin(3x) + \sin(x)}$.

(a) Déterminer \mathcal{D}_f .

(b) Simplifier $f(x)$, puis résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $f(x) = 1$.

(c) Donner le signe de $f(x)$ dans $[0, \pi]$.



1. Vérifier que $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a) \cdot \cos(b)$.

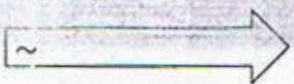
2. En déduire que $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right) \right] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$.

3. Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.

4. Soit $g(x) = \sin(3x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

(a) Montrer que $g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. *fwit ... hnd !!!*

(b) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $[0, \pi]$: $g(x) = 0$ puis $g(x) \geq 0$.



3

1. Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , on a :

$$\cos^2(x) - 3\sin^2(x) = 2\cos(2x) - 1 = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$

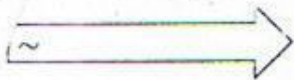
2. Résoudre dans \mathbb{R} , l'inéquation : $|\cos^2(x) - 3\sin^2(x)| \leq 2$.

3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \frac{\cos^2(x) - 3\sin^2(x)}{\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$.

(a) Déterminer \mathcal{D}_h .

(b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

(c) Calculer $h\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, en déduire $\cot\left(\frac{\pi}{24}\right)$.



1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(4x) = 8 \cos^4(x) - 8 \cos^2(x) + 1$.
2. On pose $\mathcal{P}(y) = 8y^2 - 8y + 1$.

(a) Montrer que $\mathcal{P}\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$ et que $\mathcal{P}\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = 0$

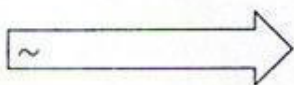
(b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\mathcal{P}(y) = 0$.

(c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.

3. Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sqrt{2 + \sqrt{2}} \cos x + \sqrt{2 - \sqrt{2}} \sin x = 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Résoudre dans \mathbb{R}
 $2 \cos x = \sqrt{2 + \sqrt{2}}$



Pour tout réel x on pose $F(x) = 2 \cos(2x) - 1$.

1. Résoudre dans \mathbb{R} , l'équation $F(x) = 0$.

2. (a) Montrer que pour tout réel x on a : $F(x) = 4 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

(b) Calculer $F\left(-\frac{\pi}{12}\right)$. Déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

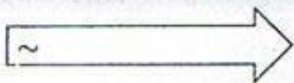
(c) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $\left(\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}\right) \times F(x) + \left(\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}\right) \sin(2x) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$.

3. Pour tout x de $[0, \pi]$, on pose $G(x) = \frac{\sin(2x) - 2\sqrt{3} \sin^2(x)}{F(x)}$.

(a) Déterminer le domaine de définition \mathcal{D} de G .

(b) Montrer que pour tout x de \mathcal{D} , $G(x) = \frac{\sin(x)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.

(c) Résoudre dans \mathcal{D} l'équation $G(x) = 1$.



1. Pour tout réel x , on pose $\varphi(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

(a) Montrer que pour tout réel x , $\varphi(x) = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.

(b) En déduire les valeurs de x pour les quelles $\varphi(x)$ est maximale.

(c) Résoudre dans \mathbb{R} puis dans $] -\pi, \pi]$ l'inéquation $\varphi(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.

2. Soit $\psi(x) = \varphi(x) - \sqrt{6} \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.

(a) Montrer que pour tout réel x on a : $\psi(x) = 2\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{7\pi}{12}\right)$.

(b) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $\psi(x) + 2 = 0$.

$\frac{2\sqrt{2}}{15}$