Feuille d'exercices 18 : Trigonométrie

~

1. Pour tout réel x on pose $\mathscr{A}(x) = \sin(3x) + \sin(x)$.
   (a) Montrer que pour tous réels a et b on a :
   $$\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a).\cos(b).$$
   (b) Prouver que $\mathscr{A}(x) = 2\sin(2x) \times \cos(x)$.
   (c) En déduire que $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. Soit $f(x) = \dfrac{\sin(4x)}{\sin(3x) + \sin(x)}$.
   (a) Déterminer $\mathscr{D}_f$.
   (b) Simplifier $f(x)$, puis résoudre dans $[0, 2\pi[$ l'équation $f(x) = 1$.
   (c) Donner le signe de $f(x)$ dans $[0, \pi]$.

~

1. Vérifier que $\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin(a).\cos(b)$.
2. En déduire que $2\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)\right] = \sin\left(\frac{6\pi}{7}\right)$.
3. Calculer alors $\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) - \cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right)$.
4. Soit $g(x) = \sin(3x) + \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.
   (a) Montrer que $g(x) = 2\sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) \times \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$. Fait ... hml !! :)
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $[0, \pi]$: $g(x) = 0$ puis $g(x) \geq 0$.

~

3

1. Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a :
   $$\cos^2(x) - 3\sin^2(x) = 2\cos(2x) - 1 = 4\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \times \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right).$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'inéquation : $|\cos^2(x) - 3\sin^2(x)| \leq 2$.
3. Soit la fonction h définie par : $h(x) = \dfrac{\cos^2(x) - 3\sin^2(x)}{\cot\left(x - \frac{\pi}{3}\right)}$.
   (a) Déterminer $\mathcal{D}_h$.
   (b) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_h$, $h(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.
   (c) Calculer $h\left(\frac{3\pi}{8}\right)$, en déduire $\cot\left(\frac{\pi}{24}\right)$.

~

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(4x) = 8\cos^4(x) - 8\cos^2(x) + 1$.
2. On pose $\mathcal{P}(y) = 8y^2 - 8y + 1$.
   (a) Montrer que $\mathcal{P}\left(\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)\right) = 0$ et que $\mathcal{P}\left(\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right) = 0$
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\mathcal{P}(y) = 0$.
   (c) En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$.
3. Montrer que pour tout réel x on a :

$$\sqrt{2+\sqrt{2}}\cos x + \sqrt{2+\sqrt{2}}\sin x = 2\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right).$$

Resoudre dans IR

$2\cos x = \sqrt{2+\sqrt{2}}$

~

Pour tout réel x on pose $F(x) = 2\cos(2x) - 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation $F(x) = 0$.
2. (a) Montrer que pour tout réel x on a : $F(x) = 4\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \times \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.
   (b) Calculer $F\left(-\frac{\pi}{12}\right)$. Déduire que $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.
   (c) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation : $\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) \times F(x) + \left(\sqrt{6} - \sqrt{2}\right)\sin(2x) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$.

   2

3. Pour tout x de $[0, \pi]$, on pose $G(x) = \frac{\sin(2x) - 2\sqrt{3}\sin^2(x)}{F(x)}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}$ de G.
   (b) Montrer que pour tout x de $\mathcal{D}$, $G(x) = \frac{\sin(x)}{\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)}$.
   (c) Résoudre dans $\mathcal{D}$ l'équation $G(x) = 1$.

~

1. Pour tout réel x, on pose $\varphi(x) = \cos(x) + \sin(x)$.
   (a) Montrer que pour tout réel x, $\varphi(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
   (b) En déduire les valeurs de x pour les quelles $\varphi(x)$ est maximale.
   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $]-\pi, \pi]$ l'inéquation $\varphi(x) + \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$.
2. Soit $\psi(x) = \varphi(x) - \sqrt{6}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$.
   (a) Montrer que pour tout réel x on a : $\psi(x) = 2\sqrt{2}\cos\left(x - \frac{7\pi}{12}\right)$.
   (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\psi(x) + 2 = 0$.

ex 9/15