Ministère de l'Education et de la formation.

$3^{ème}$ année de l'enseignement secondaire.

Section : Mathématiques.

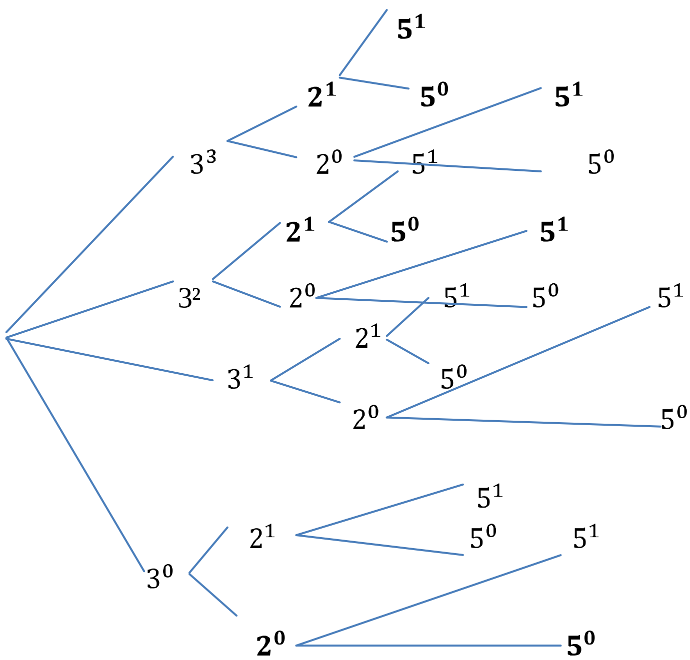
Correction des exercices du chapitre : Divisibilité dans IN.

Exercice 1.

1. **Déterminer à l'aide d'un arbre de choix, l'ensemble des diviseurs de 270.**
2. **Déterminer tous les diviseurs de 540.**
3. **Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que ab=270.**
   En déduire tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que ab=540.
4. **Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que (a-3)(b+5)=270.**
5. **Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que (a-5)(b-9)=540.**

Correction.

1. 270=27x10
   $=3^3$x2x5



Tout D'abord le cardinal de l'ensemble de diviseurs de 270 est (3+1)x(1+1)x(1+1)=16.

Dans cet arbre chaque produit $\mathbf{3^{\alpha_i}}$ **x** $\mathbf{2^{\beta_j}}$ **x** $\mathbf{5^{\gamma_k}}$ est un diviseur de 270 sachant que $\alpha_i = 0,1,2$ *et* 3.

$\beta_j = 0$ *et* 1 *puis les* $\gamma_k = 0$ et 1, on déduit ainsi :

$\boldsymbol{D_{270}}$ **= {1,5,2,10,3,15,6,30,9,45,18,90,27,135,54,270}.**

2. 540=270x2

= 3^3x2²x5 .

Il s'agit alors d'un arbre de choix plus compliqué que la précédente.

Alors on propose deux tableaux pour que le lecteur en profite d'une deuxième méthode plus simple :

x	3^0	3^1	3^2	3^3
2^0	**1**	**3**	**9**	**27**
2^1	**2**	**6**	**18**	**54**
2^2	**4**	**12**	**36**	**108**

Un deuxième tableau pour en finir :

x	1	2	3	4	6	9	12	18	27	36	54	108
5^0	**1**	**2**	**3**	**4**	**6**	**9**	**12**	**18**	**27**	**36**	**54**	**108**
5^1	**5**	**10**	**15**	**20**	**30**	**45**	**60**	**90**	**135**	**180**	**270**	**540**

On conclut : $\boldsymbol{D_{540}}$ **={1,2,3,4,6,9,12,18,27,36,54,108,5,10,15,20,30,45,60,90,135,180,270,540}.**

3. Détermination des couples (a,b) tels que ab=270.

On sait déjà que $\boldsymbol{D_{270}}$ **= {1,5,2,10,3,15,6,30,9,45,18,90,27,135,54,270}.**

Alors ces couples (1,270) ;(2,135) ;(3,90) ;(5,54) ;(6,45) ;(9,30) ;(10,27) ;(15,18) conviennent tous, seulement il faut permuter pour avoir la solution complète soit alors

(270,1) ;(1356,2) ;(90,3) ;(54,5) ;(45,6) ;(30,9) ;(27,10) ;(18 ,15).

$\boldsymbol{S_{IN^2}}$ **={(1,270) ;(2,135) ;(3,90) ;(5,54) ;(6,45) ;(9,30) ;(10,27) ;(15,18) ;(270,1) ;(135,2) (90,3) ;(54,5) ;(45,6) ;(30,9) ;(27,10) ; (18,15)}.**

<u>Déduction</u> :(a,b) solution de l'équation ab=270 sig (2a)b=540 ou autrement écrit a(2b)=540 et alors (2a,b) est solution de l'équation ab=540, ainsi de même pour le couple (a,2b) .

Alors les solutions de l'équation ab=540 sont :

(2,270) ;(1,540) ;(4,135) ;(6,90) ;(3,180) ;(10,54) ;(5,108) ;(12,45) ; (18,30) ;(9,60) ; (20,27);(30,18) ;(15,36) ;(540,1),(270,2) ;(135,4) ;(180,3) ;(90,6) ;(108,5) ;(45,12) ;(60,9) (54,10) ; (27,20) ;(36,15).

4. (a-3)(b+5)=270.

Il faut remarquer tout d'abord que a-3>0 sig a>3 et que b+5>0 sig b>-5.

D'après la question 3 on a déterminé tous les couples (a,b) tels que ab=270.

Examinons alors tous les cas possibles :

a-3=1 et b+5=270 sig a=4 et b=265.

a-3=2 et b+5=135 sig a=5 et b=130.

a-3=3 et b+5=90 sig a=6 et b=85.

a-3=5 et b+5=54 sig a=8 et b=49.
a-3=6 et b+5=45 sig a=9 et b=40.
a-3=9 et b+5=30 sig a=12 et b=25.
a-3=10 et b+5=27 sig a=13 et b=22.
a-3=15 et b+5=18 sig a=18 et b=13.
a-3=270 et b+5=1 sig a=273 et b= - 4, solution rejetée.
a-3=135 et b+5=2 sig a=138 et b=-3, solution rejetée.
a-3=90 et b+5=3 sig a=93 et b=-2, solution rejetée.
a-3=54 et b+5=5 sig a=57 et b=0.
a-3=45 et b+5=6 sig a=48 et b=1.
a-3=30 et b+5=9 sig a=33 et b=4.
a-3=27 et b+5=10 sig a=30 et b=5.
a-3=18 et b+5=15 sig a=21 et b=10.

Récapitulation :

L'ensemble des couples possibles est
S ={ (4,265) ;(5,130) ;(6,85) ;(8,49) ;(9,40) ;(12,25) ;(13,22) ;(18,13) ;(57,0) ;(48,1) (33,4) ;(30,5) ;(21,10)}.

5. **(a-5)(b-9)=540.**

Il faut supposer tout d'abord que a-5>0 et b-9>0 sig a>5 et b>9.
On raisonne comme ce qui précède :
a-5=2 et b-9=270 sig a=7 et b=279.
a-5=1 et b-9=540 sig a=6 et b=549.
a-5=4 et b-9=135 sig a=9 et b=144.
a-5=6 et b-9=90 sig a=11 et b=99.
a-5=3 et b-9=180 sig a=8 et b=189.
a-5=10 et b-9=54 sig a=15 et b=63.
a-5=5 et b-9=108 sig a=10 et b=117.
a-5=12 et b-9=45 sig a=17 et b=54.
a-5=18 et b-9=30 sig a=23 et b=39.
a-5=9 et b-9=60 sig a=14 et b=69.
a-5=20 et b-9=27 sig a=25 et b=36.
a-5=30 et b-9=18 sig a=35 et b=27.
a-5=15 et b-9=36 sig a=20 et b=45.
a-5=540 et b-9=1 sig a=545 et b=10.
a-5=270 et b-9=2 sig a=275 et b=11.
a-5=135 et b-9=4 sig a=140 et b=13.
a-5=180 et b-9=3 sig a=185 et b=12.
a-5=90 et b-9=6 sig a=95 et b=15.
a-5=108 et b-9=5 sig a=113 et b=14.
a-5=45et b-9=12 sig a=50 et b=21.
a-5=60 et b-9=9 sig a=65 et b=18.
a-5=54 et b-9=10 sig a=59 et b=19.

a-5=27 et b-9=20 sig a=32 et b=29.
a-5=36 et b-9=15 sig a=41 et b=24.

Récapitulation :

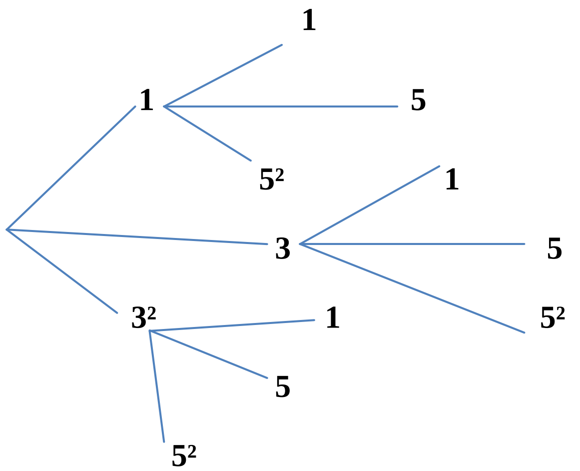
L'ensemble des couples possibles est
S={(7,279), (6,549), (9,144), (11,99), (8,189), (15,63), (10,117), (17,54), (23,39), (14,69), (25,36), (35,27), (20,45), (545,10), (275,11), (140,13), (185,12), (95,15), (113,14), (50,21), (65,18), (59,19), (32,29), (41,24)}.

Exercice 2.

1. **Déterminer tous les couples (m,n) d'entiers naturels tels que mn = 225.**
2. **En déduire tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que ab = 450.**
3. **Déterminer tous les couples (x,y) d'entiers naturels tels que (x-5)(y-9) =225.**

Correction.

1. $225=3^2 \times 5^2$.



Ainsi les diviseurs possibles de 225 sont 1, 5, 25, 3, 15, 75, 9, 45, 225.

Il s'ensuit alors que tous les couples (m,n) possibles sont :
(1,225) ;(225,1) ;(5,45) ;(45,5) ;(3,75) ;(75,3) ;(9,25) ;(25,9) ;(15,15).

2. Déduisons tous les couples (a,b) tels que ab=450.

Alors partons d'un couple (m,n) tel que mn=225 et multiplions par 2.

On aura (2m)n=450 et ainsi le couple (2m,n) est solution de l'équation ab=450 et ainsi de même le Couple (m,2n) est solution.

On déduit alors les couples de la forme (2m,n) sont : (2,225) ; (450,1) ; (10,45) ; (90,5) ; (6,75) ; (150,3) ; (18,25) ; (50,9) ; (30,15).

Maintenant les couples de la forme (m,2n) sont : (1,450) ; (225,2) ; (5,90) ; (45,10) ; (3,150)

(75,6) ; (9,50) ; (25,18) ; (15,30).

En réunissant tous ces couples on aura l'ensemble des solutions de notre équation ab=450.

3. (x-5)(y-9) =450, à l'évidence x-5 >0 et y-9 >0, soit alors x > 5 et y > 9.

D'après la question 2. x-5=2 et y-9=225 sig x = 7 et y = 234.

x-5=225 et y-9=2 sig **x = 230 et y = 11.**

x-5=1 et y-9=450 sig **x = 6 et y = 459.**

x-5=450 et y-9=1 sig **x = 455 et y = 10.**

x-5=10 et y-9=45 sig **x = 15 et y = 54.**

x-5=45 et y-9=10 sig **x = 50 et y = 19.**

x-5=90 et y-9=5 sig **x = 95 et y = 14.**

x-5=5 et y-9=90 sig **x = 10 et y = 99.**

x-5=6 et y-9=75 sig **x = 11 et y = 84.**

x-5=75 et y-9=6 sig **x = 80 et y = 15.**

x-5=150 et y-9=3 sig **x = 155 et y = 12.**

x-5=3 et y-9=150 sig **x = 8 et y = 159.**

x-5=18 et y-9=25 sig **x = 23 et y = 34.**

x-5=25 et y-9=18 sig **x = 30 et y = 27.**

x-5=15 et y-9=30 sig **x = 20 et y = 39.**

x-5=30 et y-9=15 sig **x = 35 et y = 24.**

Exercice 3.

1. Soit n un entier naturel, tel que le reste de la division euclidienne de n par 6 est 5.

Quel est le reste de la division euclidienne de 3n par 6 ?

Quel est le reste de la division euclidienne de n^2 par 6 ?

Quel est le reste de la division euclidienne de $2n^2+6$ par 6 ?

2. Soit n un entier naturel, tel que le reste de la division euclidienne de n par 5 est 4.

Quel est le reste de la division euclidienne de n^2-n par 5 ?

Correction.

1. **la division euclidienne de 3n par 6**
   Il existe alors q ∈ IN tel que n=6q+5.
   Multiplions par 3, on aura 3n=18q+15
   =(18q+12) + 3
   = 6 (3q+2) + 3, posons q_1=3q+2.
   On aura ainsi 3n = 6 q_1 + 3, et alors le reste de la division euclidienne de 3n par 6 est 3.
   la division euclidienne de n² par 6
   $n^2 = (6q+5)^2$
   $= 36q^2 + 60q + 25$
   $=36q^2 + 60q + 24 +1$
   $=6(6q^2 + 10q + 4) +1$, posons $q_2 = 6q^2 + 10q + 4$
   $=6q_2+ 1$.
   Ainsi le reste de la division euclidienne de n² par 6 est 1.

   la division euclidienne de 2n²+6 par 6

   Alors comme $n^2 =6q_2+ 1$, $2n^2 = 12q_2{}^2+2$ *et* $2n^2+6 = 12q_2{}^2+2 + 6$ *alors*

   $2n^2+6 = 6(2q_2{}^2+1) + 2$.

   Le Reste de la division euclidienne de 2n²+6 par 6 est 2.

2. n un entier naturel, tel que le reste de la division euclidienne de n par 5 est 4.

   n= 5q+4.

   $n^2-n=(5q+4)^2-(5q+4)$

   $= 25q^2+40q+16-5q-4$

   $=25q^2+35q+12$

   $= 5(5q^2+7q+2)+2$, posons $q'=5q^2+7q+2$

   Alors $n^2-n=5q'+2$, le reste de la division euclidienne de n²-n par 5 est 2.

Exercice 4.

1. **Soit n un entier naturel.**
   Quel sont les restes possibles de la division euclidienne de n par 5 ?
2. **Montrer que pour tout entier naturel n l'entier n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4) est divisible par**

Correction.

1. Les restes possibles de la division euclidienne de n par 5 sont 0, 1,2 ,3, 4.

2. Posons p= n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).

On traite tous les cas de congruence de p modulo 5 dans Un tableau :

n≡ $mod(5)$	0	1	2	3	4
n+1≡ $mod(5)$	1	2	3	4	0
n+2≡ $mod(5)$	2	3	4	0	1
n+3≡ $mod(5)$	3	4	0	1	2
n+4≡ $mod(5)$	4	0	1	2	3
p≡ $mod(5)$	0	0	0	0	0

Le produit p est congru à 0 modulo 5 pour tous les reste possible de n modulo 5, d'où 5 est un diviseur de p = n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4).

Exercice 5.

Soit un entier naturel.

1. a. Montrer que pour tout entier naturel n, 3n (n+1) est divisible par 6.

b. Montrer par récurrence que $\boldsymbol{n^3 - n}$ *est divisible par* 6.

2. a. Montrer que pour tout entier naturel n, 5n ($\boldsymbol{n^3}$+1) est divisible par 10.

b. Développer$(\boldsymbol{n+1})^5$.

c. Montrer par récurrence sur n que $\boldsymbol{n^5 - n}$ *est divisible par* 10.

Correction

1. **a.** traitons les cas de parité de n.
n= 2p, p ∈ IN.
3n(n+1)=6p(2p+1) est évidemment un multiple de 6.
n=2p+1, p ∈ IN.
3n(n+1)=3(2p+1)(2p+1+1)
=3(2p+1)(2p+2)
=6(2p+1)(p+1) est aussi un multiple de 6.
Ainsi $\forall\, n \in IN, 3n(n+1)$ *est divisible par* 6.
b. procédons par récurrence.
n=0, 0^3- 0=0 est divisible par 6.
Soit n∈ IN, *supposons* P_n et prouvons P_{n+1}.
$(n+1)^3$-(n+1)=n^3+3n²+3n+1-n-1

$=n^3$ +3n²+2n

$=n^3$ –n +n+3n²+2n .

L'hypothèse P_n: $n^3 - n$ *est divisible par* 6 *est équivalente à dire* qu'il existe un entier naturel k tel que $n^3 - n = 6k$.

Ainsi $(n+1)^3$-(n+1)=6k+3n²+3n

=6k+3n(n+1).

D'après la question **1.a.** 3n (n+1) est divisible par 6 et cela signifie que 3n (n+1)=6k'sachant que k'∈ IN.

On aura $(n+1)^3$-(n+1)=6k+6k'

=6k'', k''=k+k'.

On conclut finalement que $(n+1)^3$-(n+1) est divisible par 6.

D'où $\forall\, n \in IN,\ n^3 - n$ *est divisible par* 6.

2. **a**. faisons de même que la question 1.a.

n= 2p, p ∈ IN

5n(n^3+1) = 5x2p(8p^3+1)

= 10p(8p^3+1), un entier naturel divisible par 10.

n=2p+1, p ∈ IN.

5n$(n^3+1) = 5(2p+1)[(2p+1)^3$+1]

=5(2p+1)[8p^3+12p²+6p+2]

=10(2p+1)(4p^3+6p²+1) est aussi un entier divisible par 10.

b. $(n+1)^5 = \sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}n^k1^{5-k}$

$= \binom{5}{0}n^01^{5-0} + \binom{5}{1}n^11^{5-1} + \binom{5}{2}n^21^{5-2} + \binom{5}{3}n^31^{5-3} + \binom{5}{4}n^41^{5-4} + \binom{5}{5}n^51^{5-5}$

=1+5n+10 n² + 10 n^3 + 5n^4+ n^5.

c. par récurrence sur n.

n = o, $n^5 - n$ = 0, divisible par 10.

Soit n ∈ IN, *supposons* P_n et prouvons P_{n+1}.

$(n+1)^5$- (n+1) = 1+5n+10 n² + 10 n^3 + 5n^4+ n^5-n-1

=n^5 + 5n^4 + 10n^3+ 10n² + 4n

=n^5 –n +n + 5n^4 + 10n^3+ 10n² + 4n

Or P_n par hypothèse est vraie, signifie qu'il existe un entier naturel k tel que $n^5 - n = 10k$.

Et alors $(n+1)^5$- (n+1) =10k+5n^4 + 10n^3+ 10n² + 5n

$=10k + 10n^2(n+1) + 5n(n^3+1)$

D'après la question 2. $5n\,(n^3+1)$ est divisible par 10, signifie que $5n\,(n^3+1) = 10k'$, $k' \in IN$.

$(n+1)^5 - (n+1) = 10k + 10n^2(n+1) + 10k'$

$=10[k+n^2(n+1)+k']$

$=10k''$, $k''=k+n^2(n+1)+k'$.

On conclut ainsi, que pour tout n dans IN, $n^5 - n$ est divisible par 10.

<u>Exercice 6.</u>

1. **Factoriser n^2+3n+2, où n est un entier naturel.**
2. **Déterminer l'ensemble des diviseurs communs à n^2+3n+2 et $n+1$ où n est un entier naturel.**

<u>Correction</u>.

1. $n^2+3n+2 = n^2+n+2n+2$
   $= n(n+1)+2(n+1)$
   $= (n+1)(n+2)$.
2. Tout d'abord le cas simple n=0, alors les deux entiers en question sont :
   $n^2+3n+2 = 2$ et $n+1=1$, ont seulement un unique diviseur commun, c'est 1.

Supposons maintenant que $n>0$.
$n^2+3n+2=(n+1)(n+2)$, ainsi $n+1$ est un diviseur de n^2+3n+2 et en conséquence l'ensemble des diviseurs communs à n^2+3n+2 et $n+1$ est D_{n+1}.

<u>Exercice 7.</u>

Soit n un entier naturel non nul vérifiant :

- **Le reste de la division euclidienne de 27693 par n est 5508.**
- **Le reste de la division euclidienne de 100000 par n est 13.**
  Déterminer l'entier n.

<u>Correction</u>.

Le reste de la division euclidienne de 27693 par n étant 5508.

On écrit alors $27693 = n.q + 5508$, $q \in IN$ et $0 \leq 5508 < n$.

Nécessairement n est un diviseur de 27693-5508=22185.

Ainsi de même pour 100000, en effet : 100000 = n.q' +13, $0 \leq 13 < n$.

n est un diviseur de 100000-13=99987.

En conséquence n est un diviseur commun à 22185 et 99987, d'où n est un diviseur du

$99987 \wedge 22185$.

22185 = 3^2 x 5 x17 x 29 et 99987 = 3 x 33329.

D'où $99987 \wedge 22185 = 3$ et par suite n est un diviseur de 3, soit n = 1 ou 3, cela contredit le fait que n > 5508 et n >13, d'où il est impossible de déterminer un entier naturel n remplissant les conditions de l'exercice.

<u>Exercice 8.</u>

Soit un entier naturel non nul n.

1. **Montrer par récurrence sur n, que (2n) !=1x2x3x……x(2n-1)x(2n) est divisible par 2^n.**
2. **Montrer que pour tout entier non nul n, (n+1) (n+2) (n+3)… (2n) est divisible par 2^n**

<u>Correction</u>.

1. n=1, (2n) !=2 !=2 divisible par $2=2^1$.
   Soit n $\in IN^*$, supposons P_n et prouvons P_{n+1} .
   [2(n+1)] !=1x2x3x……x(2n-1)x(2n)(2n+1)(2n+2).

Alors comme P_n est vraie cela signifie que (2n) ! est divisible par 2^n, signifie qu'il existe un entier naturel k tel que (2n) !=2^n x k.

[2(n+1)] !=[1x2x3x……x(2n-1)x(2n)](2n+1)(2n+2)
=2^n x k x (2n+1) x 2(n+1)
=2^{n+1} x k (2n+1)(n+1), posons k'= k(2n+1)(n+1).
Alors on aura [2(n+1)] != $2^{n+1} x\ k'$.
Ainsi [2(n+1)] !est divisible par 2^{n+1}.
Conclusion : $\forall\ n \in\ IN^*$, (2n) ! Est divisible par 2^n .

2. Partons du fait que (2n) != $2^n x\ k$ d'après précédemment et déterminons cet entier k .

D'abord écrivons (2n) ! En isolant les termes pairs et les impairs.

(2n) !=1x2x3x4x…..x2(n-1)x(2n-1)x2n.
= [1x3x5x…..x(2n-3)x(2n-1)] x [2x4x6x…x(2n)]
=[1x3x5x…..x(2n-3)x(2n-1)] x [(2x1)x(2x2)x(2x3)x…..x2(n-1)x2n]

$= [1x3x5x\ldots.x(2n-3)x(2n-1)] \times [2^n \times n\,!]$

$= k \times 2^n$ avec le k de la question précédente $= 1x3x5x\ldots.x(2n-3)x(2n-1) \times n\,!$

Ainsi (2n) !=1x2x3x……x n x (n+1) x (n+2) x ….x (2n-1)x(2n)

= n ! x [(n+1) x (n+2) x ….x (2n-1)x(2n)]

= k x 2^n.

D'où [(n+1) x (n+2) x ….x (2n-1)x(2n)] = $\frac{k \times 2^n}{n!}$

$= \frac{1x3x5x\ldots x(2n-3)x(2n-1)x\, n\,!\, x\, 2^n}{n!}$. Après simplification par n ! On aura :

(n+1) x (n+2) x ….x (2n-1)x(2n) = $1x3x5x\ldots x(2n-3)x(2n-1)x\,2^n$.

Posons h= $1x3x5x\ldots x(2n-3)x(2n-1)$, *alors* (n+1) x (n+2) x ..x (2n-1)x(2n) =h x 2^n.

En conséquence 2^n est diviseur du produit (n+1) x (n+2) x ….x (2n-1)x(2n).

Exercice 9.

Soit un entier naturel n.

1. **Montrer par récurrence sur n, que 2^{3n}-1 est divisible par 7.**
2. **En déduire que 2^{3n+1}-2 et 2^{3n+2}-4 sont divisible par 7.**
3. **Déterminer le reste par la division euclidienne par 7 des nombres suivants : 2^{3000}, 2^{4015}, 2^{10250} .**

Correction.

1. soit n=0.

2^{3x0}-1=1-1

$= 0, divisible\ par\ 7.$

Soit n dans IN, supposons P_n et prouvons P_{n+1}.

Alors par hypothèse 2^{3n}-1 est divisible par 7 sig qu'il existe k dans IN tel que 2^{3n}-1=7k.

$2^{3(n+1)}$ -1=$2^3.2^{3n} - 1$

= 8 . 2^{3n} - 1

=(2^{3n} – 1) + 7 . 2^{3n}

=7k +7 . 2^{3n}

=7(k+2^{3n}) posons h= k+2^{3n}

On aura alors $2^{3(n+1)}$ -1=7h, d'où P_{n+1} , ainsi $\forall\, n \in IN, 2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

2. comme d'après ce qui précède 2^{3n}-1 est divisible par 7, ainsi pour tout n dans IN, il existe $\alpha \in IN\ tel\ que\ 2^{3n}$-1 =$7\alpha$, multiplions par 2 et on obtient 2^{3n+1}-2 =$7\alpha'(\alpha' = 2\alpha)$.

Ainsi on vient de prouver que 2^{3n+1}-2 et divisible par 7.

De même multiplions par 4 pour aboutir à 2^{3n+2}-4=$7\alpha''(\alpha'' = 4\alpha)$.

2^{3n+2}-4 est alors divisible par 7.

3. D'après la question 1. $\forall\, n \in IN, 2^{3n} - 1$ est divisible par 7.

Quitte à prendre n=1000, on aura 2^{3000} -1 est divisible par 7, il existe h dans IN tel que 2^{3000} -1 =7h, soit 2^{3000} =7h+1, en conséquence le reste de la division de 2^{3000} par 7 est 1.
4015=3x1338+1, il suffit de prendre n=1338 et d'appliquer la question précédente étant donné que 2^{3n+1}-2 est divisible par 7, $\forall\, n \in IN$, il existe k dans IN tel que 2^{3n+1}-2=7k
Soit 2^{3n+1}=7k + 2.
Il s'ensuit que le reste de la division de 2^{4015} par 7 est 2.
Ainsi de même pour le reste de la division de 2^{10250} par 7.
10250=3x3416+2.prendre n=3416, le reste est alors 4.

Exercice 10.

Soit le polynôme P(x)= x^3 -2x -21.

1. **Montrer que si n est un entier tel que P(n)=0, alors n divise 21.**
2. **Déterminer l'ensemble des diviseurs de 21 et en déduire une racine de P.**
3. **Résoudre l'équation P(x)=0.**

Correction.

1. Soit l'entier naturel n tel que P(n)=0.
On a alors n^3-2n-21=0, après factorisation on aura n(n²-2)=21 et cela implique que n est un diviseur de 21.

2. D_{21} = {1, 3, 7,21}.
Si P(n)=0 Alors n divise 21, il s'agit d'une condition nécessaire mais non suffisante, ainsi il y a peut-être des diviseurs de 21 non diviseurs de 21.

1^3 -2x1-21$\neq$ 0.

3^3 -2x3-21=27-6-21
=0.

3 est alors une racine de P

7^3 -2x7-21=343-14-21
$\neq$ 0.

21^3 -2x21-21= 9261-63
$\neq$ 0.

$une\ racine\ de\ P\ est\ 3.$

3. Alors comme 3 est une racine de P, et comme P est un polynôme de 3ieme degré, il existe alors trois réels a, b et c tels que P(x)=(x-3)(ax² + bx +c).
On développe ce polynôme : P(x)= ax^3 +bx²+cx -3ax²-3bx-3c
=ax^3 +(b-3a)x² + (c-3b)x -3c.
Et par identification, P(x)= x^3 -2x -21
= ax^3 +(b-3a)x² + (c-3b)x -3c $\forall\, x \in IR.$
On déduit le système suivant :
a=1 et b-3a=0 et c-3b=-2 et -3c= -21.
Soit alors a=1 et c = $\frac{-21}{-3}$ = 7 et b=3a=3 et c=-2+3b=-2+3x3=-2+9=7.
On conclut que P(x)= (x-3)(x²+3x+7).

On poursuit alors la résolution de l'équation P(x)=0.

$x^2+3x+7=0$, a=1, b=3, c=7.

$\Delta = 3^2 - 4.1.7$

=9-28<0, ainsi pas de solutions dans IR de l'équation $x^2+3x+7=0$.

Conclusion : $\boldsymbol{S_{IN} = S_{IR} = \{3\}}$**.**

<u>Résolution dans ℂ :</u>

$P(z)=(z-3)(z^2+3z+7)$

$=0$ sig $z-3=0$ ou $z^2+3z+7=0$.

$z^2+3z+7=0$ sig $z^2+2.z.\frac{3}{2} + (\frac{3}{2})^2 +7- (\frac{3}{2})^2=0$

sig $(z+\frac{3}{2})^2 + 7 - \frac{9}{4} =0$

sig $(z+\frac{3}{2})^2 +\frac{19}{4} = 0.$

Posons $Z= z + \frac{3}{2}$, l'équation s'écrit alors $Z^2= - \frac{19}{4}$ d'où $Z= \frac{\sqrt{19}}{2}$ i ou bien $Z = - \frac{\sqrt{19}}{2}$ i.

Ainsi $z + \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{19}}{2}$ i ou bien $z + \frac{3}{2} = -\frac{\sqrt{19}}{2}$ i et alors $z = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}$ i ou bien $z =-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}$ i

Conclusion : $S_{\mathbb{C}} = \{-\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}\,i\ ,-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}\,i\ ,3\}$.

<u>Exercice 11.</u>

1. **Vérifier que 37 divise 148, 481 et 814.**
2. **Vérifier que 37 divise 259, 592 et 925.**
3. **Soit a, b et c trois entiers.**

a. En remarquant que 37 divise 999, montrer que si 37 divise 100a + 10b + c alors 37 divise 100b +10c+a.

b. Soit x, y et z trois entiers d'écritures décimales respectives $\overline{abc}$, $\overline{bca}$ et $\overline{cab}$.
Montrer que si 37 divise x alors 37 divise y et z.

<u>Correction</u>.

1. 148=37x4.
481=37x13.
814=37x22.
37 divise donc 148, 481 et 814.

2. 259=37x7.
592=37x16.

925=37x25
37 divise donc 259,592 et 925.

3. a. Si 37 divise 100a +10b+c = $\overline{abc}$ alors nécessairement 37 divise 10 $\overline{abc}$=1000a+100b+10c.
Or d'après les données 37 divise 999 et comme 10 $\overline{abc}$=999a+(a+100b+10c).
Alors 37 divise aussi 999a et divise ainsi la différence 10 $\overline{abc}$ -999a=a+100b+10c.

b. x = $\overline{abc}$, y=$\overline{bca}$ et z=$\overline{cab}$.

Supposons que 37 divise x=100a+10b+c.

Evidemment 37 divise a+100b+10c = $\overline{bca}$ = y (déjà fait dans la question 3.a.)

z = 100c+10a+b

= $\overline{cab}$

On adopte un raisonnement analogue au précèdent, en effet comme 37 divise y alors 37 divise

10y= 1000b+100c+10a

= 999b+(b +100c+10a)

Et puisque 37 est un diviseur de 999 d'où 37 est aussi diviseur de 999b et ensuite 37 divise la différence 10y-999b= b+100c+10a

= $\overline{cab}$

= y.

Exercice 12.

1. **Soit trois entiers non nuls a, b et c tels que a et c sont premiers entre eux.**

a. **Montrer que tout diviseur de a distinct de 1 est premier avec c.**

b. **Montrer que a $\wedge$ $\boldsymbol{b}$ *divise* $\boldsymbol{a}$ $\wedge$ $\boldsymbol{bc}$.**

c. **Montrer que a $\wedge$ $\boldsymbol{bc}$ *divise* $\boldsymbol{a}$ $\wedge$ $\boldsymbol{b}$.**

d. **En déduire que a $\wedge$ $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{bc}$.**

2. **Soit n un entier naturel non nul.**

On se propose de montrer que les entiers 2n+1 et $\frac{n(n+1)}{2}$ sont premiers entre eux.

a. **En utilisant 1.d, montrer que (2n+1) $\wedge \frac{n(n+1)}{2}$ = (2n+1) $\wedge\, \boldsymbol{n(n+1)}$.**

b. **Montrer que si un nombre premier divise n(n+1) alors il divise soit n soit n+1.**

c. **En déduire que (2n+1) $\wedge\, \boldsymbol{n(n+1) = 1}$.**

d. **Conclure.**

Correction.

1. a. On raisonne par l'absurde, on suppose pour cela que si d est un diviseur de a non premier avec c, cela signifie qu'il existe un entier naturel $\alpha \neq 1$ *tel que* $d \wedge c = \alpha$.

Ce α *divise d, or d divise a, en conséquence* α *divise a, mais* α *divise c aussi.*

Conclusion :

α *est un diviseur commun de a et c, ainsi nécessairement* $a \wedge c \geq \alpha \neq 1$.

Cela est non réalisable étant donné que a et c sont premiers entre eux.

1. b. posons u= a $\wedge\, b$ et v= a $\wedge\, bc$.

u divise a et u divise b, donc u divise bc, ainsi u divise v=a $\wedge$ *bc, soit alors u divise v.*

1. c. **<u>Réciproquement</u>** :

on suppose au début que v=1.

Nécessairement dans ce cas v divise u puisque v=1 .

Maintenant si v$\neq$ 1.

D'après la question **a**. v divise a et v $\neq 1$, alors v est premier avec c, et puisque v divise bc, nécessairement d'après le lemme de GAUSS, v divise b.

Alors on récapitule, v divise a et divise b, alors v divise u=a $\wedge b$.

1. d. Ainsi d'après **b.** et **c**. puisque v divise u et u divise v, on conclut que v=u.

2. a. Soit n $\in \mathbb{N}^*$, posons a=2n+1, b=$\frac{n(n+1)}{2}$ et c=2.

a, b et c $\in \mathbb{N}^*$, d'autre part a et c sont premiers entre eux puisque si d est diviseur commun de a et c, alors d divise nécessairement nc pour tout n $\in IN$, d'où d divise la différence a-nc=2n+1-2n=1, ainsi d est un diviseur de 1, soit alors d=1, ainsi a $\wedge c = 1$.

On vient alors de remplir tous les conditions données au début de cet exercice pour pouvoir appliquer **1.d,** en conséquence a $\wedge b = a \wedge bc, soit\ alors$:

$$(2n+1) \wedge \frac{n(n+1)}{2} = (2n+1) \wedge 2.\frac{n(n+1)}{2}$$

$$= (2n+1) \wedge n(n+1).$$

2. b. Donnons-nous un entier premier d, diviseur de n(n+1).

Alors si d divise n, le problème est résolu.

Sinon, d n'est pas diviseur de n, et comme d est un entier premier admettant seulement deux diviseurs 1 et d lui-même, alors d $\wedge n = 1$, *on applique le lemme de GAUSS, puisque d* Est un diviseur du produit n(n+1), on conclut alors que d divise nécessairement n+1.

2. c. Maintenant on va déduire que (2n+1) $\wedge n(n+1) = 1$.

Pour cela on se donne un entier premier d diviseur commun de 2n+1 et n(n+1) ou bien à l'éventualité d=1.

Alors d'après ce qui précède d divise n(n+1), ainsi d est diviseur soit de n, soit de n+1.

i) au cas où d est un diviseur n, d est aussi un diviseur de 2n et par suite d est diviseur de la différence 2n+1-2n=1 puisque par hypothèse, d est aussi diviseur de 2n+1.

On vient de prouver que d est un diviseur de 1, ainsi d=1 et alors (2n+1) $\wedge n(n+1) = 1$.

j) au cas où d est un diviseur n+1, d est aussi diviseur de 2(n+1)=2n+2, donc d est diviseur de la différence 2n+2-(2n+1)=2n+2-2n-1

=1, ainsi (2n+1) $\wedge n(n+1) = 1$.

2. d. conclusion : (2n+1) $\wedge \boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}$ **= (2n+1)** $\wedge \boldsymbol{n(n+1)}$

=1.

2n+1 et $\boldsymbol{\frac{n(n+1)}{2}}$ sont premiers entre eux.

<u>Exercice 13.</u>

1. a. Quel sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel par 7 ?

b. Montrer que parmi les entiers $\boldsymbol{a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, a_4 = 1111}$

a_5=11111, a_6=111111, a_7=1111111, a_8=11111111, il y a au moins deux qui ont le même reste dans la division euclidienne par 7.

***On note a_k et $a_{k'}$* Deux de ces entiers.**

***c*. Montrer que $a_k - a_{k'}$ est divisible par 7 et en déduire qu'il existe un entier naturel non nul divisible par 7 dont l'écriture décimale ne contient que des 0 ou des 1.**

3. Montrer que pour tout entier naturel non nul, il existe un entier naturel non nul divisible

Par n dont l'écriture décimale ne contient que des 0 ou des 1.

Correction.

1. a. les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier n par 7 sont r = 0,1, 2, 3, 4, 5 et 6 puisque cette division euclidienne s'écrit n =7q + r sachant que $0 \leq r < 7$.

b. comme on vient de voir qu'il existe sept restes possibles dans la division euclidienne d'un entier naturel n par 7 et puisque ces huit entiers a_i $pour\ i = 1{,}2, \dots ,8$ sont deux à deux distincts**,** alors la correspondance de huit entiers deux à deux distincts et les restes 0, 1, 2, 3, 4, 5 ,6,7 dans la division euclidienne par 7 n'est possible sauf si deux entiers au moins ont le même reste.

c. Ainsi il existe k et k' distincts dans {1,2,3,4,5,6,7,8} tel a_k =7q+r et $a_{k'}$=7q'+r.

Supposons que k>k'.

Alors a_k-$a_{k'}$=7(q-q') +r-r, q et q'∈ IN.

=7(q-q'), en conséquence 7 est un diviseur de a_k-$a_{k'}$.

Ainsi a_k - $a_{k'}$=$\underbrace{1\ldots\ldots1}_{\textbf{k fois 1}}$ - $\underbrace{1\ldots1}_{\textbf{k' fois 1}}$

= 1…10..0 sachant que 1 apparait (k-k') fois et 0 apparait k' fois.

Cet entier a_k - $a_{k'}$ *évidemment divisible par 7 contenant dans son écriture décimale*

k' fois le 0 à droite et à gauche le 1 apparait k-k' fois.

3. Pour cela donnons un entier naturel non nul n.

Les restes possibles dans la division euclidienne par n sont 0, 1, 2……, n-1.

Ainsi si on pose les entiers $a_1 = 1, a_2 = 11, a_3 = 111, a_4 = 1111$,………, a_n=11…..1.

Sachant que le 1 se répète n fois dans l'écriture de a_n.

Finalement a_{n+1}=11……..1, le 1 se répète (n+1) fois.

Alors deux de ces n+1 entiers ont même reste dans la division euclidienne par n notés a_k et $a_{k'}$ avec $1 \leq k' < k \leq n+1$ (on vient de supposer que k'<k).

a_k= nq+r , $0 \leq r < n$ et $a_{k'}$= nq' + r, $0 \leq r < n$, q et q' ∈ IN.

Ainsi a_k - $a_{k'}$ = n (q-q'), d'où n est un diviseur de a_k - $a_{k'}$.

D'autre part cette différence a_k - $a_{k'}$ s'écrit $\underbrace{1......1}_{\text{k fois 1}}$ - $\underbrace{1...1}_{\text{k' fois 1}}$ = 1...10..0 où 1 apparait k-k' fois

et 0 apparait k' fois.

Ainsi on vient de construire un entier non nul (puisque k et k' sont distincts) dont l'écriture décimale ne contient que des 1 et des 0 et cet entier est divisible par n.