EXERCICES DIVERS **2AS/1AS** Youssefboulila

Exercice I

En physique, la masse d'un objet est une mesure de la quantité de matière de cet objet.

Le physicien Albert Einstein a prouvé que cette masse dépend de la vitesse de l'objet et que si m_0 est la masse au repos, la masse m à la vitesse v est donnée par la formule : $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$

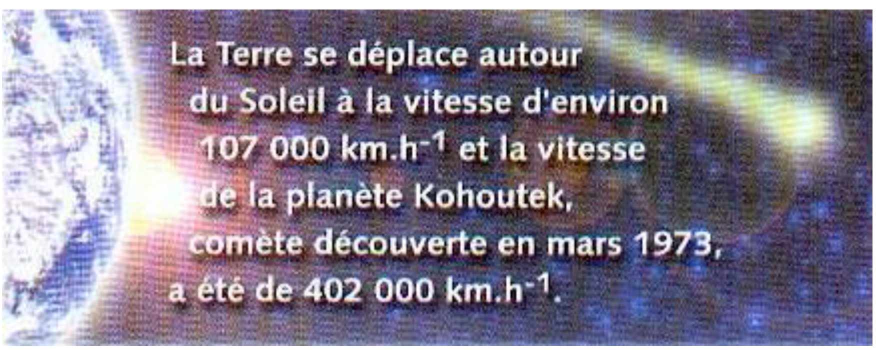
où c est la vitesse de la lumière, vitesse voisine, dans le vide, de 299790 km . s $^{-1}$. Dans les calculs ci-dessous, on utilisera 300000 km . s^{-1} comme vitesse de la lumière.

1° a) Quelle est la vitesse en km . h^{-1} d'un objet dont la vitesse est 1 km . s $^{-1}$? 10 km . s $^{-1}$?

b) Déterminer le rapport $\dfrac{m}{m_0}$ à 10^{-4} près, lorsque v = 1 km . s $^{-1}$ puis lorsque v = 10 km . s $^{-1}$.

c) Justifier la phrase suivante

« Aux vitesses inférieures à 5000 km . h^{-1}, on peut considérer la masse constante ».



2° Pour ces deux vitesses, calculer le rapport $\dfrac{m}{m_0}$ à 10^{-9} près.

3° a) Dans un accélérateur de particules, on communique à un électron une vitesse de 0,1 c. Quelle est l'augmentation de masse en pourcentage à 0,1 % près?

b) Quelle vitesse minimale, de la forme a . 10^3 km .s^{-1} avec a entier naturel, faut-il communiquer à une particule atomique pour que sa masse devienne au moins le double de sa masse au repos?

Exercice II

On se propose de calculer la valeur exacte du produit ab pour

$$a = 2{,}548\ 796\ 52 \times 10^{7} \text{ et } b = 1{,}125\ 487\ 963 \times 10^{-5}.$$

1° Donner un ordre de grandeur de $a \times b$.

2° Justifier que $a = 254\ 879\ 652 \times 10^{-1}$ et que $b = 1\ 125\ 487\ 963 \times 10^{-14}$.

3° En écrivant

$$254\ 879\ 652 = 254 \times 10^{6} + 879 \times 10^{3} + 652 \text{ et } 1\ 125\ 487\ 963 = 1 \times 10^{9} + 125 \times 10^{6} + 487 \times 10^{3} + 963$$

calculer la valeur exacte de ab à l'aide d'une calculatrice pour les calculs intermédiaires.

EXERCICE III

$\boxed{1}$ configurations du plan

ABC est un triangle . O est le centre de son cercle circonscrit $\mathcal{C}$ et H son orthocentre. Le point D est tel que [AD] est un diamètre de $\mathcal{C}$.

1° Faire une figure.

2° Montrer que les droites (BH) et (CD) sont parallèles ainsi que les droites (BD) et (CH).

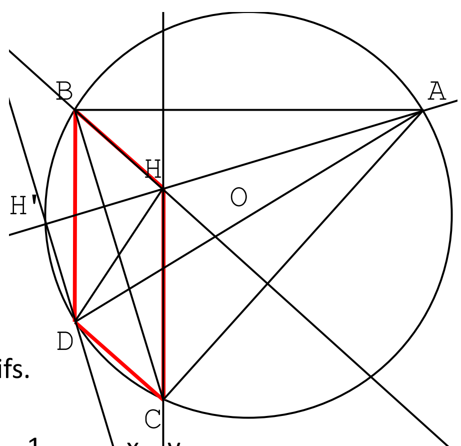
3° a) Quelle est la nature du quadrilatère BHCD ? Justifier la réponse.

b) En déduire que [BC] et [HD] ont le même milieu.

4° Soit H' le symétrique de H par rapport à (BC).

a) Montrer que la droite (BC) est parallèle à (H'D).

b) En déduire que le point H' appartient au cercle



EXERCICE IV

$\boxed{2}$ x et y sont des réels strictement positifs.

On considère les nombres $a = x + \frac{1}{x}$, $b = y + \frac{1}{y}$ et $c = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

1° Vérifier que $x^2 + \frac{1}{x^2} = a^2 - 2$.

Développer a^3. En déduire que $x^3 + \frac{1}{x^3} = a^3 + 3\,a$

De même démontrer que $x^4 + \frac{1}{x^4} = a^4 - 4\,a^2 + 2$.

2° Vérifier que $\frac{x^2}{y^2} + \frac{y^2}{x^2} = c^2 - 2$.

3° A partir du calcul de $a \times b \times c$, montrer que : $a^2 + b^2 + c^2 - a\,b\,c = 4$.

4° Vérifier que $c - 2 = \frac{(x - y)^2}{x\,y}$. Exprimer $a - 2$ en fonction de x.

Montrer que a, b et c vérifient $a \geq 2$, $b \geq 2$ et $c \geq 2$.

construire la cissoïde à la règle et au compas. (C'est Wantzel qui le dit)

EXERCICE V

LA CISSOÏDE DE DIOCLÈS.

1 Un lieu géométrique :

A est le point de coordonnés (1 ; 0) dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. $\mathcal{C}$ est le cercle de diamètre [OA] et Δ la tangente à $\mathcal{C}$ au point A. $\mathcal{D}$ est une droite mobile passant par O, elle recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en N et la tangente Δ en Q. Soit enfin le point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NQ}$. $\mathcal{D}$ a pour coefficient directeur t (t appartient à $\mathbb{R}$), la cissoïde est le lieu des points M quand t décrit $\mathbb{R}$.

Construire à la règle et au compas assez de points pour faire apparaître nettement l'allure de la cissoïde.

2 Recherche d'une équation cartésienne :

Donner une équation de $\mathcal{D}$, de Δ et les coordonnées de Q en fonction de t. Donner une équation de $\mathcal{C}$.

Démontrer que les coordonnées de N en fonction de t sont $\left(\frac{1}{1+t^2}, \frac{t}{1+t^2}\right)$

En déduire que celles de M sont $\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right)$

Démontrer que les coordonnées (x ; y) de M vérifient la relation $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$ **(E)**.

On en déduit que la cissoïde est contenue dans l'ensemble des points du plan défini par l'équation :

"$x(x^2+y^2) - y^2 = 0$."

Réciproquement, M(x ; y) est un point tel que : $x(x^2+y^2) - y^2 = 0$.

Si x = 0, montrer que M appartient à la cissoïde, quelle est alors la valeur de t ?

On suppose x non nul, on pose $t = \frac{y}{x}$, calculer x et y en fonction de t. Conclure.

Démontrer que $x(x^2+y^2) - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right) \times \left(y - \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}\right) = 0$ pour x appartenant à [0 ;1[.

3 Etude d'une fonction :

f est la fonction définie sur [0 ;1[par $f(x) = \sqrt{\frac{x^3}{1-x}}$, Γ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

a) Etudier la limite de f en 1. Qu'en conclure pour Γ ? Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Etudier les variations de f , dresser son tableau de variation.

c) Déterminer une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

d) Tracer Γ et T. Expliquer comment en déduire la cissoïde.

$\boxed{4}$ **Retour au problème de la duplication du cube:**

Reprendre les coordonnées de Q et M en fonction de t trouvées dans la partie b. P est le point d'intersection de la droite (AM) avec l'axe des ordonnées. Démontrer que les coordonnées de P sont $(0 ; t^3)$.

Pour $t > 0$, $AQ = t$ et $OP = t^3$. Pour un segment de longueur t donné, comment construire à l'aide de la cissoïde un segment de longueur $\sqrt[3]{t}$? Le faire à l'aide de Γ pour t = 2.

Exercice VI

Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur l'intervalle [0, 1] par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1 - x}$

1° Calculer $f_n(0)$ et $f_n(1)$.

2° a) Justifier que f_n est dérivable sur [0, 1[et montrer que $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{2\sqrt{1 - x}}(2n - (2n + 1)x)$

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 1.

c) Dresser le tableau de variations de f_n.

3° a) Montrer que f_n admet un maximum a_n que l'on exprimera en fonction de n.

b) Prouver que $a_n \leq \dfrac{1}{\sqrt{2n + 1}}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice VII

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives – 4 ; 3 et i.

On appelle f l'application du plan P privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -4$)

associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = \dfrac{z - 3}{z + 4}$

1° Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2° a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par l'application f.

b) Démontrer que le point C admet un unique antécédent par f, que l'on notera C''.

3° Déterminer les affixes des points invariants par f (c'est-à-dire les points M vérifiant f(M) = M).

4° a) Donner une interprétation géométrique du module de z'.

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

5° a) Montrer que pour tout complexe z différent de -4, $|z' - 1| \times |z + 4| = 7$

b) En déduire que si M décrit un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r, alors son image M' par f appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

I 1°a) 1 km ; s^{-1} = $\boxed{3600 \text{ km .h}^{-1}}$ 10 km ; s^{-1} = $\boxed{36000 \text{ km .h}^{-1}}$ b) $\boxed{\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}}$

b) Si v= 1 km .s^{-1} En remplaçant v par 1 et c par 300 000 Ma calculatrice donne : $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000000056}$

on a alors : $\dfrac{m}{m_0} \approx 1.$ à 10^{-4} près Si v= 10 km .s^{-1} En remplaçant v par 10 et c par 300 000 ma calculatrice donne : $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000005556}$ On a alors : $\dfrac{m}{m_0} \approx 1.$ à 10^{-4} près

c) En remplaçant v par $\dfrac{5000}{3600}$ et c par 300 000 ma calculatrice donne: $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000000107}$

Intuitivement si v est inférieure à 5000 km .h^{-1} alors $\left(\dfrac{v}{c}\right)^2$ est plus proche de 0 que $\left(\dfrac{5000/3600}{c}\right)^2$ et donc $\dfrac{m}{m_0}$ plus proche de 1 que 1,0000000000107. De façon plus rigoureuse on a : Si $v \leq \dfrac{50000}{3600}$ alors $0 \leq \dfrac{v^2}{c^2} \leq \left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2$ alors $1 - \left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2 \leq 1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2 \leq 1$ alors $\sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2} \leq \sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2} \leq \sqrt{1}$ et donc $1 \leq \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{v}{c}\right)^2}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{1 - \left(\dfrac{5}{3\ 10^3 \times 36}\right)^2}}$ On obtient alors $\boxed{1 \leq \dfrac{m}{m_0} \leq 1{,}0000000000107}$. On peut alors dire que : $\dfrac{m}{m_0} \approx 1$

2° En remplaçant v par $\dfrac{107000}{3600}$ et c par 300 000 ma calculatrice donne: $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000049078}$ On a donc $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}00000005}$ En remplaçant v par $\dfrac{402000}{3600}$ et c par 300 000 ma calculatrice donne: $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}0000000692747}$. On a donc $\boxed{\dfrac{m}{m_0} \approx 1{,}000000069}$

3° a) Si v =0,1 c on a alors : $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{0{,}1^2\, c^2}{c^2}}} = \dfrac{1}{1 - 1\sqrt{01}} \approx 1{,}005038$

Augmentation en pourcentage : **Erreur !**

Si v = a 10^3 km .s^{-1} on a : $\dfrac{m}{m_0} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{a^2\ 10^6}{9\ 10^{10}}}} = \dfrac{300}{\sqrt{9\ 10^4 - a^2}}$. On doit alors avoir $a \leq 300$ pour que $9\ 10^4 - a^2 \geq 0$.

$\dfrac{m}{m_0} \geq 2 \Leftrightarrow \dfrac{300}{\sqrt{9\ 10^4 - a^2}} \leq 2 \Leftrightarrow 300 \leq 2\sqrt{9\ 10^4 - a^2} \Leftrightarrow 150 \leq \sqrt{9\ 10^4 - a^2} \Leftrightarrow 150^2 \leq 9\ 10^4 - a^2 \Leftrightarrow a^2 \leq 90000- - 22500 \Leftrightarrow a \leq$ $\sqrt{67500}$. $\sqrt{67500} \approx 259{,}81$ Il suffit donc de prendre $\boxed{260 \leq a \leq 300.}$ ($a \in$ IN)

Ex II $a \times b = 254\ 879\ 652 \times 1\ 125\ 487\ 963 \times 10^{-15}$.

$254\ 879\ 652 \times 1\ 125\ 487\ 963 = (\ 254 \times 10^6 + 879 \times 10^3 + 652) \times (1 \times 10^9 + 125 \times 10^6 + 487 \times 10^3 + 963)$

$= (\ 254 \times 10^6 + 879 \times 10^3 + 652) \times (1 \times 10^9 + 125 \times 10^6 + 487 \times 10^3 + 963)$

$= (254 \times 10^6 \times 1 \times 10^9 + 254 \times 10^6 \times 125 \times 10^6 + 254 \times 10^6 \times 487 \times 10^3 + 254 \times 10^6 \times 963) +$

$(879 \times 10^3 \times 1 \times 10^9 + 879 \times 10^3 \times 125 \times 10^6 + 879 \times 10^3 \times 487 \times 10^3 + 879 \times 10^3 \times 963) +$

$(652 \times 1 \times 10^9 + 652 \times 125 \times 10^6 + 652 \times 963 =$

$(254 \times 10^{15} + 31750 \times 10^{12} + 123698 \times 10^9 + 244602 \times 10^6) + (879 \times 10^{12} + 109875 \times 10^9 + 428073 \times 10^6 + 846477 \times 10^3) +$
$(652 \times 10^9 + 81500 \times 10^6 + 317524 \times 10^3 + 627876) = 254 \times 10^{15} + (31750 + 879) \times 10^{12} + (123698 + 109875 + 652) \times 10^9 +$
$(244602 + 428073 + 81500)\ 10^6 + (846477 + 317524)\ 10^3 + 627876$

$a \times b = 254 + (31750 + 879) \times 10^{-3} + (123698 + 109875 + 652) \times 10^{-6} + (244602 + 428073 + 81500)\ 10^{-9} + (846477 + 317524)$
$10^{-12} = 254 + 32{,}629 + 0{,}233573 + 0{,}000672675 + 0{,}000001164001 + 0{,}000000000627876 = \boxed{286{,}863980339628876}$

---

x et y sont des réels strictement positifs.

On considère les nombres $a = x + \dfrac{1}{x}$, $b = y + \dfrac{1}{y}$ et $c = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x}$

1° Vérifier que $x^2 + \dfrac{1}{x^2} = a^2 - 2$. $a^2 - 2 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = x^2 + 2 \times x \times \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} - 2 = x^2 + \dfrac{1}{x^2}$

Développer a^3. En déduire que $x^3 + \dfrac{1}{x^3} = a^3 + 3\ a$

$a^3 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right) \times \left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = x^3 + 2\ x + \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{x^3} = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\ x + \dfrac{3}{x} = x^3 + \dfrac{1}{x^3} + 3\ a$

De même démontrer que $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = a^4 - 4\ a^2 + 2$.

$a^4 = \left(x + \dfrac{1}{x}\right)^3 = \left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right)\left(x^2 + 2 + \dfrac{1}{x^2}\right) = x^4 + 2\ x^2 + 1 + 2\ x^2 + 4 + \dfrac{2}{x^2} + 1 + \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{1}{x^4} = x^4 + \dfrac{1}{x^4} + 4\ x^2 + \dfrac{4}{x^2} + 6$

$= x^4 + \dfrac{1}{x^4} + 4\ (a^2 - 2) + 6 = x^4 + \dfrac{1}{x^4} + 4\ a^2 - 2$ donc $x^4 + \dfrac{1}{x^4} = a^4 - 4\ a^2 + 2$.

2° Vérifier que $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=c^2-2$. $\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)^2=\frac{y^2}{x^2}+2\times\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}+\frac{y^2}{x^2}=\frac{y^2}{x^2}+\frac{y^2}{x^2}+2$ donc $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}=c^2-2$.

3° A partir du calcul de $a\times b\times c$, montrer que : $a^2+b^2+c^2-a\,b\,c=4$.

$a\times b\times c=\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(y+\frac{1}{y}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=\left(x\,y+\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+\frac{1}{x\,y}\right)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)=x^2+y^2+\frac{x^2}{y^2}+1+1+\frac{y^2}{x^2}+\frac{1}{y^2}+\frac{1}{x^2}$

$=2+a^2-2+b^2-2+c^2-2=a^2+b^2+c^2-4$ donc $a^2+b^2+c^2-a\,b\,c=4$.

4° Vérifier que $c-2=\frac{(x-y)^2}{x\,y}$. Exprimer $a-2$ en fonction de x. Montrer que $a\geq 2$, $b\geq 2$ et $c\geq 2$.

$\frac{(x-y)^2}{x\,y}=\frac{x^2-2\,xy+y^2}{x\,y}=\frac{x}{y}-2+\frac{y}{x}=c-2$ $\quad a-2=x+\frac{1}{x}-2=\frac{x^2+1-2\,x}{x}=\frac{(x-1)^2}{x}$

$x\geq 0$ et $(x-1)^2\geq 0$ donc $a-2\geq 0$. de même $b\geq 2$

$x\,y\geq (x-y)^2\geq 0$ donc $c-2\geq 0$ donc $c\geq 2$

$\boxed{2}$ $\mathcal{D}$ droite passant par O de coefficient directeur t.

Equation de $\mathcal{C}$: " $y=t\times x$ "

Soit I le point de coordonnées $\left(\frac{1}{2}:0\right)$. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I de rayon $\frac{1}{2}$

Equation de $\mathcal{C}$: " $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$ "

Equation de Δ : " $x=1$ "

$$N(x,y)\in\mathcal{D}\cap\mathcal{C}\Leftrightarrow\begin{cases}y=t\,x\\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=t\,x\\ x^2-x+\frac{1}{4}+t^2\,x^2=\frac{1}{4}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=t\,x\\ (1+t^2)\,x^2-x=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=t\,x\\ x\,(x\,(1+t^2)-1)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=t\,x\\ x=0\end{cases}\text{ ou }\begin{cases}y=t\,x\\ x=\frac{1}{1+t^2}\end{cases}$$

$\begin{cases}y=t\,x\\ x=0\end{cases}$ correspond au point $O\neq N$ $\quad\begin{cases}y=t\,x\\ x=\frac{1}{1+t^2}\end{cases}$ donne les coordonnées de $N\left(\frac{1}{1+t^2}:\frac{t}{1+t^2}\right)$

On a $Q(1:t)$ donc $\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix}1-\frac{1}{1+t^2}\\ t-\frac{t}{1+t^2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{NQ}\begin{pmatrix}\frac{1+t^2-1}{1+t^2}\\ \frac{t+t^3-t}{1+t^2}\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{NQ}$ donc $M\left(\frac{t^2}{1+t^2}:\frac{t^3}{1+t^2}\right)$

Les coordonnées de M vérifient $x=\frac{t^2}{1+t^2}$ et $y=\frac{t^3}{1+t^2}$ donc

$$x\,(x^2+y^2)-y^2=\frac{t^2}{1+t^2}\times\left[\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{t^3}{1+t^2}\right)^2\right]-\left(\frac{t^3}{1+t^2}\right)^2=\frac{t^2}{1+t^2}\times\left[\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2+\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)^2\times t^2\right]-\left(\frac{t^3}{1+t^2}\right)^2$$

$= \dfrac{t^2}{1+t^2} \times \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2 (1+t^2) - \left(\dfrac{t^3}{1+t^2}\right)^2 = t^2 \times \left(\dfrac{t^2}{1+t^2}\right)^2 - \left(\dfrac{t^3}{1+t^2}\right)^2 = \dfrac{t^6}{(1+t^2)^2} - \left(\dfrac{t^3}{1+t^2}\right)^2 = 0$

Réciproque.

Soit M(x , y) tel que $x(x^2 + y^2) - y^2 = 0$.

Si x = 0 alors $-y^2 = 0$ alors y = 0. M est le point O qui correspond au cas "limite" ou $\mathcal{D}$ = (Oy)

Si $x \neq 0$ alors on pose $t = \dfrac{y}{x}$ On a alors $y = t\,x$ et $x(x^2 + (t\,x)^2) - (t\,x)^2 = 0$ donc $x^3(1+t^2) - t^2 x^2 = 0$

donc $x(1+t^2) - t^2 = 0$ $(x \neq 0)$ donc $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$.

Le point M a ses coordonnées qui vérifient : $x = \dfrac{t^2}{1+t^2}$ et $y = t \times \dfrac{t^2}{1+t^2}$. M est donc le point de la cissoïde qui correspond au cas où $\mathcal{D}$ est la droite passant par O de coefficient directeur $t = \dfrac{y}{x}$.

$\forall x \in [\,0 : 1\,[: x(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 + x\,y^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^3 - y^2(1-x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^3}{1-x} - y^2 = 0 \quad (x \neq 1)$

$x \in [\,0 : 1\,[$ donc $\dfrac{x^3}{1-x} \geq 0$. on a donc :

$\forall x \in [\,0 : 1\,[: x(x^2 + y^2) - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right)^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(y - \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right) \times \left(y - \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}\right) = 0$

$\boxed{3}$ a) $\lim\limits_{x \to 1^-} x^3 = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^3}{1-x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.

Γ admet la droite d'équation "x = 1 " comme asymptote.

$f(0) = 0. \quad \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}} \times \dfrac{1}{x} = \sqrt{x^2} \times \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}} \times \dfrac{1}{x} = \sqrt{\dfrac{x}{1+x^2}} \quad (x > 0 \text{ donc } \sqrt{x^2} = x)$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$. f est dérivable en 0 et f '(0) = 0.*

b) Soit U la fonction définie sur] 0 : 1 [par : $U(x) = \dfrac{x^3}{1-x}$.

b) U est dérivable sur] 0 : 1 [et ne s'annule pas sur] 0 : 1 [donc $f = \sqrt{U}$ est dérivable sur] 0 : 1 [.

$U'(x) = \dfrac{3x^2 \times (1-x) - x^3 \times (-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{3x^2 - 3x^3 + x^3}{(1-x)^2} = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2}$

$\forall x \in \,]\,0 : 1\,[,\ f'(x) = \dfrac{U'(x)}{2\sqrt{U(x)}} = \dfrac{3x^2 - 2x^3}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{x^3}{1-x}}} = \dfrac{x^2(3-2x)}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{1-x}{x^3}}$

$\forall x \in [] 0 : 1 [, \dfrac{x^2}{(1-x)^2} \times \dfrac{1}{2} \times \sqrt{\dfrac{1-x}{x^3}} > 0$ donc f '(x) est du signe de $3 - 2x$.

$3 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{3}{2}$ ce qui est vrai pour tout réel x de] 0 : 1 [.f est donc croissante sur] 0 : 1 [.

c) $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\dfrac{1}{8} \times \dfrac{2}{1}} = \dfrac{1}{2}$ et $f'\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{2}{4} \times \dfrac{4}{1} \times \dfrac{1}{2} \times 2 = 2$. Equation de T : $y = \dfrac{1}{2} + 2\left(x - \dfrac{1}{2}\right)$ c'est-à-dire "$y = 2x - \dfrac{1}{2}$"

d) On trace Γ et on trace Γ' la courbe symétrique de Γ par rapport à (Ox). La cissoïde est la réunion de Γ et Γ'.

$\boxed{4}$ Q (1 : t) et $M\left(\dfrac{t^2}{1+t^2} : \dfrac{t^3}{1+t^2}\right)$

$P(x : y) \in (AM) \Leftrightarrow \overrightarrow{AP}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \dfrac{t^2}{1+t^2} - 1 \\ \dfrac{t^3}{1+t^2} \end{pmatrix}$ colinéaires $\Leftrightarrow (x-1) \times \dfrac{t^3}{1+t^2} - y\left(\dfrac{t^2}{1+t^2} - 1\right) = 0$

$P(0 : y) \in (AM) \cap (Oy) \Leftrightarrow (0-1) \times \dfrac{t^3}{1+t^2} - y\left(\dfrac{t^2}{1+t^2} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow -\ y\dfrac{t^2 - t^2 - 1}{1+t^2} = \dfrac{t^3}{1+t^2}$

$\Leftrightarrow y = -\ \dfrac{t^3}{1+t^2} \times \dfrac{1+t^2}{-1} \Leftrightarrow y = t^3$.

Si AQ = t alors OP = t^3

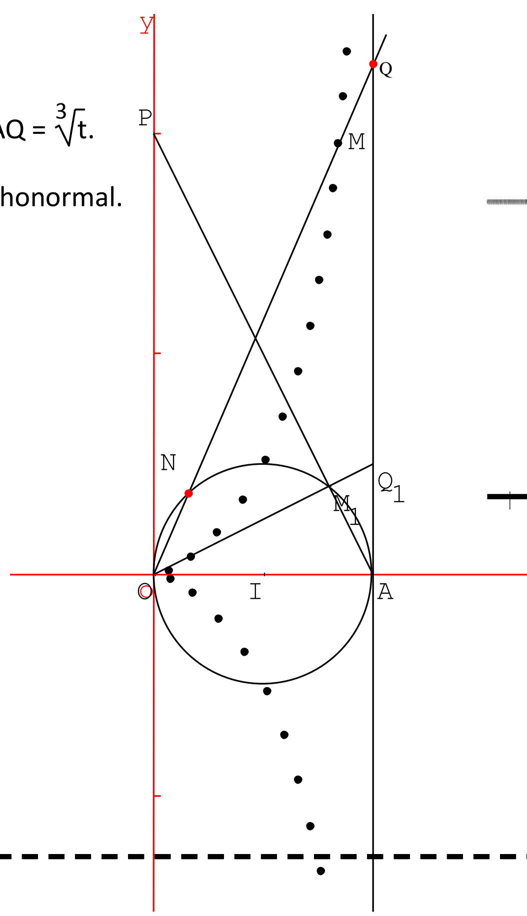
Réciproquement si OP = t alors AQ = $\sqrt[3]{t}$.

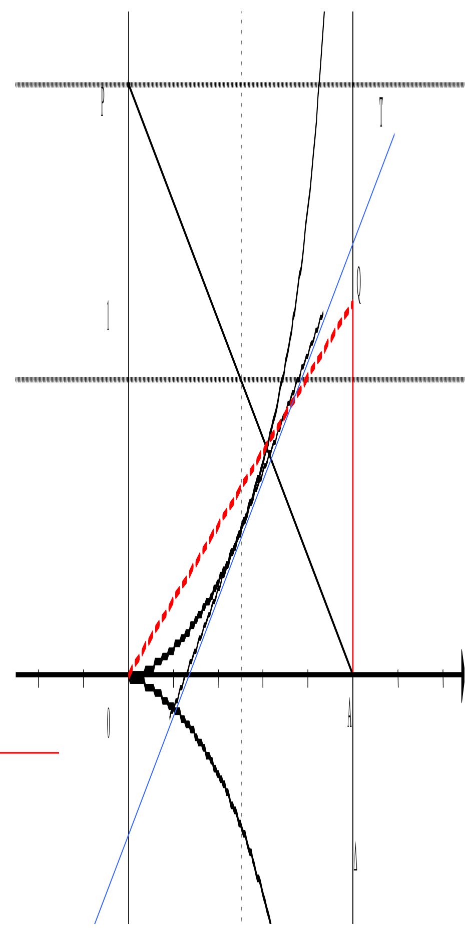
On place le point P (t ; 0).

La droite (AP) coupe la cissoïde en M.

La droite (OM) coupe alors Δ en Q et AQ = $\sqrt[3]{t}$.

Attention le repère choisi doit être orthonormal.





Pour tout entier n strictement positif, on définit la fonction f_n sur l'intervalle [0, 1] par : $f_n(x) = x^n\sqrt{1-x}$

1° $f_n(0) = 0^n\sqrt{1-0} = 0$ et $f_n(1) = 1^n\sqrt{1-1} = 0$

2° a) Justifier que f_n est dérivable sur [0, 1[et montrer que $f_n'(x) = \dfrac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n-(2n+1)x)$

La fonction : $x \longmapsto x^n$ est dérivable sur IR donc sur [0 ; 1 [

la fonction : $x \longmapsto 1-x$ est dérivable sur IR et la fonction : $x \longmapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur] 0 ; + ∞ [

La fonction composée est donc dérivable en tout x tel que $1-x \in]0;+\infty[$, elle est donc dérivable sur [0 , 1 [

f est donc le produit de deux fonctions dérivables sur [0 , 1 [elle est donc dérivable sur [0 , 1 [

$f(x) = u \times v$ avec $u(x) = x^n$ donc $u' = n\,x^{n-1}$ et $v(x) = \sqrt{1-x}$ donc $v'(x) = \dfrac{(1-x)'}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}}$

$f'(x) = n\,x^{n-1} \times \sqrt{1-x} + x^n \times \dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{n\,x^{n-1} \times \sqrt{1-x} \times 2\sqrt{1-x} - x^n}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{2n\,x^{n-1}(1-x) - x^n}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{x^{n-1}(2n(1-x)-x)}{2\sqrt{1-x}} = \dfrac{x^{n-1}}{2\sqrt{1-x}}(2n-(2n+1)x)$

b) Etudier la dérivabilité de f_n en 1. $\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \dfrac{x^n\sqrt{1-x}-0}{x-1} = \dfrac{x^n(1-x)}{(x-1)\sqrt{1-x}} = -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}}$

$\lim\limits_{x\to 1^-} -x^n = -1$ et $\lim\limits_{x\to 1^-}\sqrt{1-x} = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} -\dfrac{x^n}{\sqrt{1-x}} = -\infty$

La fonction n'est donc pas dérivable en 1 (Remarque : la formule précédente ne peut être utilisée)

Remarque : la fonction f est continue en 1 et $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f_n(x)-f_n(1)}{x-1} = -\infty$ la courbe représentative de f admet donc une tangente verticale au point d'abscisse 1.

c) Dresser le tableau de variations de f_n.

Pour tout réel x de [0 , 1 [, x^n et $2\sqrt{1-x}$ sont positifs donc $f'(x)$ est du signe de $2n-(2n+1)x$

$2n-(2n+1)x > 0 \Leftrightarrow x < \dfrac{2n}{2n+1}$ $(2n+1>0)$

Pour tout entier naturel n : $0 \le 2n < 2n+1$ donc $0 < \dfrac{2n}{2n+1} < 1$

x	0		$\frac{2n}{2n+1}$		1
signe de f '	0	+	0	−	
		$\nearrow$		$\searrow$	

3° a) Montrer que f_n admet un maximum a_n que l'on exprimera en fonction de n.

D'après les variations de f_n on peut dire que f_n admet sur [0 , 1] un maximum $f\left(\frac{2n}{2n+1}\right) = a_n$

$$a_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{1-\frac{2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{\frac{2n+1-2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

b) Prouver que $a_n \le \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ Pour tout entier naturel n, $0 \le \frac{2n}{2n+1} \le 1$ donc $\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \le 1^n$ donc $a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$

c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Pour tout entier naturel n, $0 < a_n < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes (a_n) est converge et $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

Soit A, B et C les points d'affixes respectives – 4 ; 3 et i.

On appelle f l'application du plan P privé de A dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -4$)

associe le point M ' d'affixe z ' définie par : $z' = \frac{z-3}{z+4}$

1° Placer les points A, B et C sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2° a) Déterminer l'affixe du point C' image de C par l'application f.

$$\frac{i-3}{i+4} = \frac{(i-3)(4-i)}{1+16} = \frac{4i-i^2-12+3i}{17} = -\frac{11}{17}+\frac{7}{17}i$$

b) Démontrer que le point C admet un unique antécédent par f, que l'on notera C".

$z \neq -4$: $\frac{z-3}{z+4} = i \Leftrightarrow z-3 = i(z+4) \Leftrightarrow z - iz = 3+4i \Leftrightarrow z(1-i) = 3+4i \Leftrightarrow z = \frac{3+4i}{1-i}$

$\Leftrightarrow z = \frac{(3+4i)(1+i)}{1+1} \Leftrightarrow z = \frac{3+3i+4i+4i^2}{2} \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i$

3° Déterminer les affixes des points invariants par f (c'est-à-dire les points M vérifiant f(M) = M).

$z \neq -4$: $\frac{z-3}{z+4} = z \Leftrightarrow z-3 = z(z+4) \Leftrightarrow z-3 = z^2+4z \Leftrightarrow z^2+3z+3 = 0$ équation $\left(z+\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}+3 = 0$

$\Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}-\frac{12}{4} \Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{3}{4} \Leftrightarrow \left(z+\frac{3}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}\,i}{2}\right)^2 \Leftrightarrow z+\frac{3}{2} = \frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $z+\frac{3}{2} = -\frac{i\sqrt{3}}{2}$

$\Leftrightarrow z = -\frac{3}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{3}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}$

4° a) Donner une interprétation géométrique du module de z'.

$z_A = -4$ $z_M = z$ donc $AM = | z_M - z_A | = | z + 4 |$
$z_B = 3$ $z_M = z$ donc $AM = | z_M - z_B | = | z - 3 |$ } donc $| z' | = \left| \dfrac{z-3}{z+4} \right| = \dfrac{BM}{AM}$

b) Déterminer et représenter l'ensemble E des points M dont les images par f appartiennent au cercle de centre O et de rayon 1.

$M \neq A$: $M \in E \Leftrightarrow M' \in \mathscr{C}(O, 1) \Leftrightarrow | z' | = 1 \Leftrightarrow \dfrac{BM}{AM} = 1 \Leftrightarrow BM = AM$. E est donc la médiatrice de [AB]

5° a) Montrer que pour tout complexe z différent de −4, | z' − 1 | × | z + 4 | = 7

$$| z' - 1 | \times | z + 4 | = \left| \frac{z-3}{z+4} - 1 \right| \times | z + 4 | = \left| \frac{z - 3 - z - 4}{z + 4} \right| \times | z + 4 | = \left| \frac{-7}{z -+ 4} \right| \times | z + 4 | = 7$$

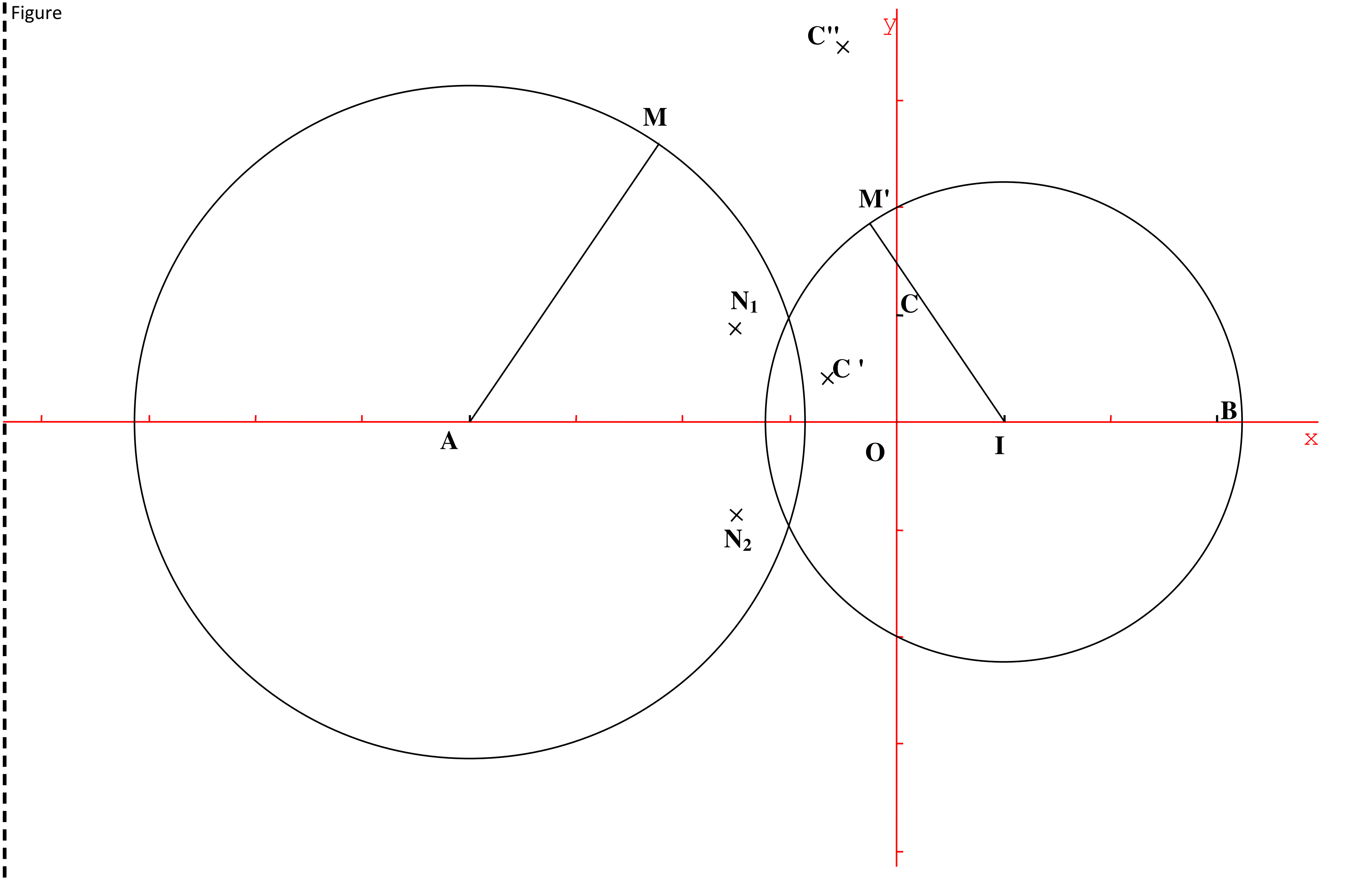
b) En déduire que si M décrit un cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r, alors son image M' par f appartient à un cercle $\mathscr{C}'$ dont on précisera le centre et le rayon.

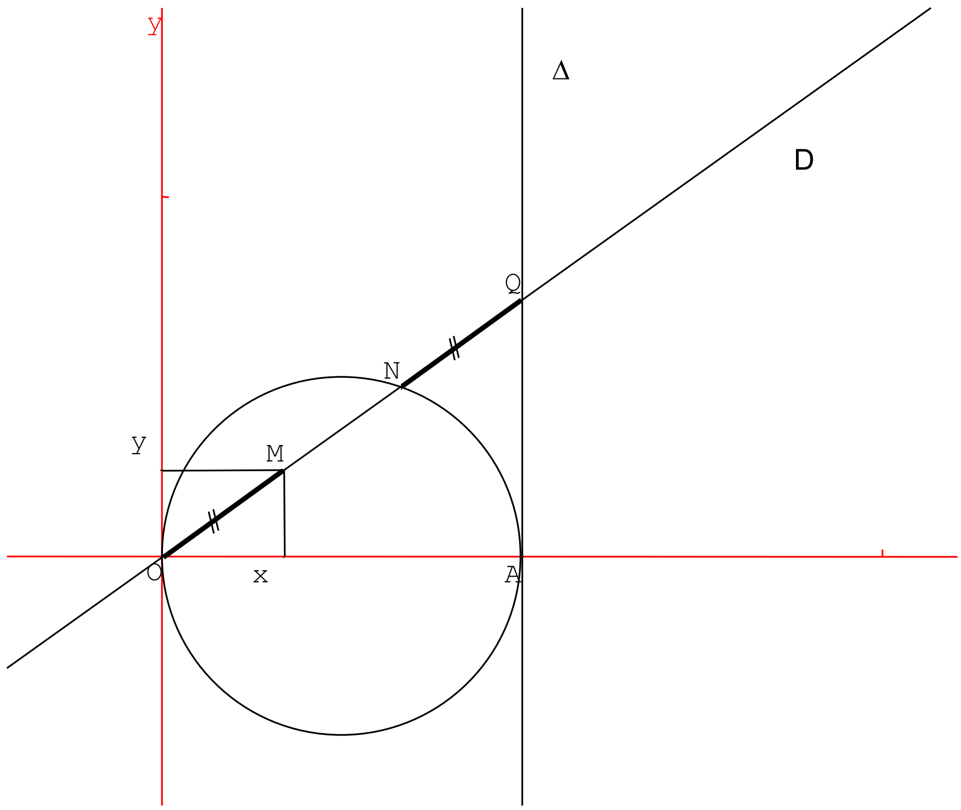
<u>r > 0.</u> $M \in \mathscr{C}(A,r) \Leftrightarrow AM = r \Leftrightarrow | z + 4 | = r$. Remarque : on a alors $M \neq A$)

On sait que : $| z' - 1 | \times | z + 4 | = 7$ on peut donc dire que : $| z + 4 | = \dfrac{7}{| z' - 1 |}$ (remarque : $z' \neq 1$)

On a donc : $M \in \mathscr{C}(A,r) \Leftrightarrow \dfrac{7}{| z' - 1 |} = r \Leftrightarrow | z' - 1 | = \dfrac{7}{r} \Leftrightarrow m' \in \mathscr{C}\left(I, \dfrac{7}{r}\right)$ où I est le point d'affixe 1.

Figure





y
Δ
D
Q
N
y
M
O
x
A