Devoir de contrôle N°3

Mathématiques

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte, cocher la bonne case.

Questions	Réponses
1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = -(x-1)^3$. La courbe $\mathscr{C}_f$ de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse	❒ $x = -1$ ❒ $x = 1$ ❒ $x = 0$
2. Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que : $\vec{w}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$, on a :	❒ $\vec{v} = \vec{0}$ ❒ $\vec{u} = \vec{w}$ ❒ $\vec{v} \perp (\vec{u} - \vec{w})$
3. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthogonal, la courbe $\mathscr{C}_g$ de la fonction g définie par : $g(x) = 1 - 8x + 4x^2$ admet pour axe de symétrie la droite d'équation :	❒ $x = 1$ ❒ $x = -1$ ❒ $x = 0$
4. Si ABC est un triangle tels que : $AB = BC = 4$ et $AC = 2$ alors le réel $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{AB}$ vaut	❒ 2 ❒ 6 ❒ 8

Exercice 2 (8 points)

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{2\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 2}$$

On désigne par $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 2^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to 2^-} f(x)$, interpréter graphiquement ces résultats.
2. a) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

   b) Montrer que : $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x}{(x-2)^2}$ puis dresser le tableau de variation de f.

3. a) Vérifier que, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = x - 1 + \dfrac{4}{x-2}$

   b) En déduire que $\mathscr{C}_f$ admet une asymptote oblique Δ que l'on précisera.

   c) Etudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et Δ.

4. a) Montrer que le point $I(2\,;1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathscr{C}_f$.

   b) Recopier puis compléter sur votre copie le tableau de valeurs suivant :

x	-2	0	1	3
$f(x)$				

   c) Tracer $\mathscr{C}_f$ ainsi que ses asymptotes.

5. Discuter graphiquement et suivant le paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) - m = 0$.

Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de côté 4, on désigne par E et F les points du plan tels que : $\overrightarrow{AE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BF} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{AC}$. Le but de l'exercice est de montrer que les droites (EF) et $AC)$ sont perpendiculaires.

1. Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
2. Montrer que : $\overrightarrow{EF} = \dfrac{5}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{5}{4}\overrightarrow{AC}$
3. En déduire que les droites (EF) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 4 (4 points)

Soit $ABCD$ un losange tel que $AC = 8$ et $BD = 10$. On note O le centre de ce losange.

1. Faire une figure.
2. Calculer $\overrightarrow{AC}\,.\,\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BC}\,.\,\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
3. a) Décomposer le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DB}$

   b) En déduire la valeur de $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AD}$

   c) Montrer que : $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC} = 9$