

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°1

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est exacte, cocher la bonne case.

Questions	Réponses
1. L'ensemble des solutions réelles de l'équation : $\cos^2(x) = 0$ est égal à	<input type="checkbox"/> $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ <input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
2. Soit la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{x}$ Le nombre dérivé de f en $\frac{1}{8}$ vaut	<input type="checkbox"/> 2 <input type="checkbox"/> $2\sqrt{2}$ <input type="checkbox"/> $\sqrt{2}$
3. Pour tout réel x appartenant à $[\pi, 2\pi]$, $(\sqrt{1 - \cos x} + \sqrt{1 + \cos x})^2$ est égal à	<input type="checkbox"/> $2(1 - \sin x)$ <input type="checkbox"/> $2(1 + \sin x)$ <input type="checkbox"/> $2(1 - \cos x)$
4. Le réel $\frac{5\pi}{6}$ est une solution de l'inéquation	<input type="checkbox"/> $2 \sin(x) < 1$ <input type="checkbox"/> $3 \cos(2x) - 2 > 0$ <input type="checkbox"/> $\tan^2(x) > \cos(x)$

Exercice 2 (6 points)

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R}^* par : $f(x) = \begin{cases} 4 + \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1 \\ -x^3 + x^2 + 5 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

\mathcal{C}_f désigne la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Calculer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. Etudier la limite de la fonction f en 0.
3. a/ Montrer que f est continue en 1.
b/ Déterminer le domaine de continuité de f .
4. a/ Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_f .
b/ Etudier la dérivabilité de f en 1 puis interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 3 (4 points)

On se donne la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{5 - 10x} + \sqrt{3x + 10}$$

\mathcal{C}_f désigne la courbe de f dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. Déterminer \mathcal{D}_f le domaine de définition de f .
2. Montrer que f est dérivable en -2 et que : $f'(-2) = -\frac{1}{4}$
3. Tracer l'allure de la courbe \mathcal{C}_f puis donner l'équation de la tangente à \mathcal{C}_f au point d'abscisse -2 .

Exercice 4 (6 points)

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = -4 \sin^3(x) - \sin(2x) + 4 \sin(x)$$

1. Calculer $g\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et $g\left(\frac{4\pi}{3}\right)$
2. a/ Résoudre dans \mathbb{R} les équations : $\sin(2x) = 0$ et $2 \cos(x) - 1 = 0$
b/ Construire les images des solutions de chacune sur le cercle trigonométrique.
3. a/ Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \sin(2x) [2 \cos(x) - 1]$
b/ Résoudre dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation : $g(x) < 0$
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \left(\frac{g(x)}{3x - \pi} \right)$ et en déduire que g est dérivable en $\frac{\pi}{3}$ puis donner $g'\left(\frac{\pi}{3}\right)$