Exercice 1 : (4pts)

Répondre par « vrai » ou « faux » dans chaque affirmation proposée.

1) La fonction f définie par : $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x^2+1} & si\ x\in\left]-\infty\,,0\right] \\ x^2-1 & si\ x\in\left]0\,,+\infty\right[\end{cases}$ est dérivable en 0.

2) La fonction $f(x)=x\sqrt{2x+1}$ a pour fonction dérivée $f'(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{2x+1}}$ pour tout $x\in\left]-\dfrac{1}{2}\,,+\infty\right[$

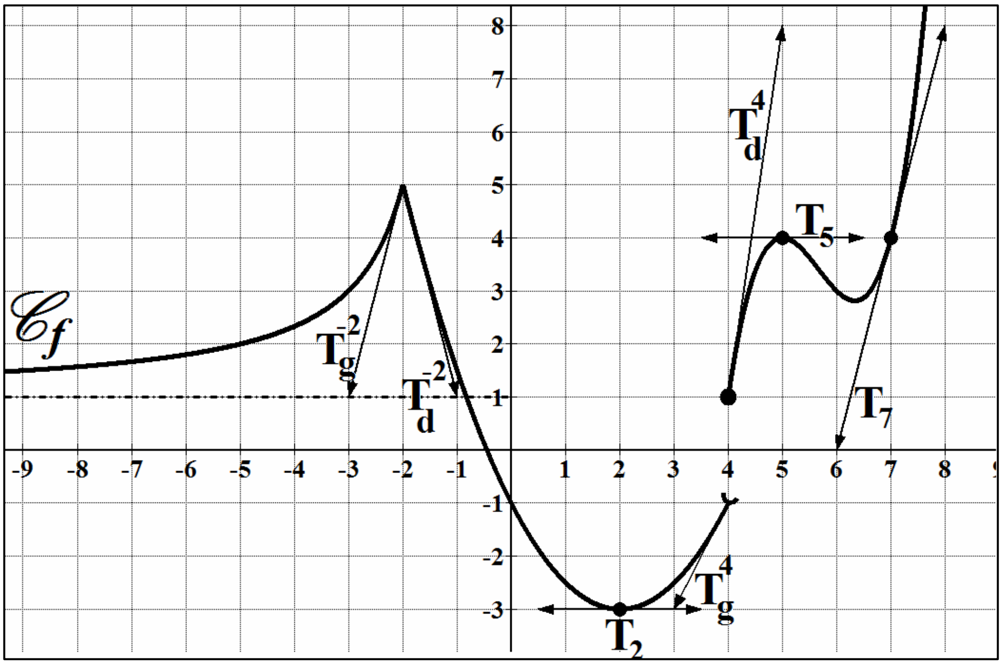
3) $\sin\left(\dfrac{21\pi}{2}-3x\right)=\cos(3x)$

4) Soit A et B deux points distincts du plan orienté P, l'ensemble E définie par :

$$E:\left\{M\in P,\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in Z\right\}$$ est un cercle de centre A.

Exercice 2 : (4pts)

On a représenté ci-contre : $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur IR :



Par lecture graphique : Déterminer :

1) $f(-2)$; $f(0)$; $f(2)$ et $f(4)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to(-2)} f(x)$; $\lim\limits_{x\to4^-} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to4^+} f(x)$

3) $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\dfrac{f(x)-5}{x+2}$ et $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{f(x)+3}{x-2}$

4) $f_g'(4)$; $f_d'(4)$; et $f'(5)$

5) a/ l'ensemble de définition de la fonction *f*.
   b/ l'ensemble de continuité de la fonction *f*.
   c/ l'ensemble de dérivabilité de la fonction *f*.

Exercice 3 : (5pts)

Soit f une fonction définie sur IR par : $f(x)=\begin{cases} x^2-2x+2 & si\ \ x\in\left]-\infty\,,1\right] \\ -\dfrac{\sqrt{x}}{x}+2 & si\ \ x\in\left]1\,,+\infty\right[\end{cases}$

1) a/ Montrer que f est continue en 1.
   b/ En déduire domaine de continuité de f.
2) Calculer : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$
3) a/ Soit a et $b\in\left]-\infty\,,1\right]$. Montrer que $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=a+b-2$ et déduire le sens de variation de f.
   b/ Montrer que f est croissante sur $\left]1\,,+\infty\right[$.
4) Montrer que f est dérivable à gauche et à droite en 1. f est elle dérivable en 1 ?
5) a/ exprimer $f'(x)$ pour tout $x\in\left]-\infty\,,1\right[$ et calculer $f'(-3)$.
   b/ En déduire une expression de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse -3.
6) Soit la droite $\Delta : y=-5x+1$. Existe-t-il $x\in\left]-\infty\,,1\right[$ tel que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ. Si oui donner la valeur de x_0.

Exercice 4 : (7pts)

I- 1)Résoudre dans IR les équations suivantes a/ $\cos(2x)=0$

b/ $\cos\left(3x+\dfrac{4\pi}{3}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

c/ $\cos\left(5x-\dfrac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2x-\dfrac{2\pi}{5}\right)$

2)Résoudre dans IR l' inéquation suivante : $\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)\left(2\cos x+1\right)\geq 0$

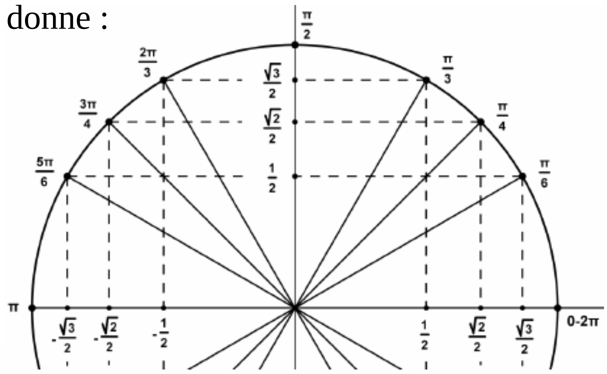
II- 1) Montrer que : $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos(2x)$

2) Résoudre dans $[-\pi,\pi]$: $\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{2}$

3) Soit f la fonction définie par : $f(x)=\dfrac{\cos(3x)}{\cos\left(2x+\dfrac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)}$

a/ Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
b/ Calculer $f(0)$.
c/ Résoudre dans IR : $f(x)=1$

On donne :



bon travail

Correction du devoir de synthèse n °1

Exercice 1 :

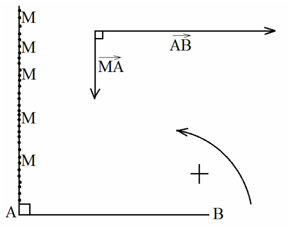
1) faux : La fonction f n'est pas continue en 0 alors n'est dérivable en 0.

2) vrai : Si $f(x)=x\sqrt{2x+1}$ alors :

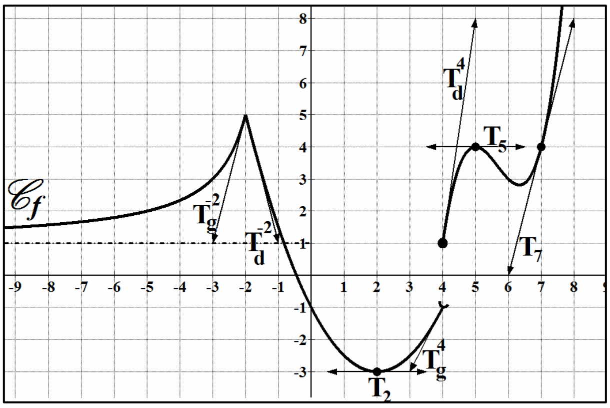
$$f'(x)=\sqrt{2x+1}+x.\frac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\sqrt{2x+1}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}}=\frac{2x+1}{\sqrt{2x+1}}+\frac{x}{\sqrt{2x+1}}=\frac{3x+1}{\sqrt{2x+1}} \text{ pour tout } x\in\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$$

3) vrai : $\sin\left(\frac{21\pi}{2}-3x\right)=\sin\left(\frac{20\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-3x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-3x\right)=\cos(3x)$

4) faux : $E:\left\{M\in P,\left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{AB}}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi,k\in\mathbb{Z}\right\}$ est la demi-droite définie par :



Exercice 2 :



1) $f(-2)=5$

$f(0)=-1$

$f(2)=-3$

$f(4)=1$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$ $\lim\limits_{x\to(-2)^-}f(x)=5$

$\lim\limits_{x\to4^-}f(x)=-1$ $\lim\limits_{x\to4^+}f(x)=1$

3) $\lim\limits_{x\to(-2)^-}\frac{f(x)-5}{x+2}=4$ et $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)+3}{x-2}=0$

4) $f_g'(4)=2$; $f_d'(4)=7$ et $f'(5)=0$

5) a/ $D_f=IR$ b/ $DC_f=IR\setminus\{4\}$ c/ $D_{f'}=IR\setminus\{-2,4\}$

Exercice 3 :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2x+2 & si\ x\in]-\infty,1]\\ -\frac{\sqrt{x}}{x}+2 & si\ x\in]1,+\infty[\end{cases}$$

1) a/ On a $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1=\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$ alors f est continue en 1.

b/ $DC_f=IR$

2) * $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2-2x+2)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x^2)=+\infty$ et

* $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{\sqrt{x}}{x}+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}+2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{\sqrt{x}}\right)+2=0+2=2$

3) a/ On a : $\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{(a^2-2a+2)-(b^2-2b+2)}{a-b}=\frac{(a^2-b^2)-2(a-b)}{a-b}=\frac{(a-b)(a+b)-2(a-b)}{a-b}=a+b-2$

et puisque a et $b\in]-\infty,1]$ alors $a+b\le2 \iff a+b-2\le0$ d'où f est décroissante.

b/ On a :

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{\left(-\frac{\sqrt{a}}{a}+2\right)-\left(-\frac{\sqrt{b}}{b}+2\right)}{a-b}=\frac{\frac{1}{\sqrt{b}}-\frac{1}{\sqrt{a}}}{a-b}=\frac{\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{ab}}}{a-b}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(a-b)\sqrt{ab}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}=\frac{1}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\sqrt{ab}}\ge0$$

d'où f est croissante sur $]1,+\infty[$.

4) . $f_g'(1)=\lim\limits_{x\to(1)^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to(1)^-}\frac{(x^2-2x+2)-1}{x-1}=\lim\limits_{x\to(1)^-}\frac{(x^2-2x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to(1)^-}\frac{(x-1)^2}{x-1}=\lim\limits_{x\to(1)^-}(x-1)=0$

$$f_d\,'(1)=\lim_{x\to(1)^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to(1)^-}\frac{\left(-\frac{\sqrt{x}}{x}+2\right)-1}{x-1}=\lim_{x\to(1)^-}\frac{-\frac{\sqrt{x}}{x}+1}{x-1}=\lim_{x\to(1)^-}\frac{\frac{x-\sqrt{x}}{x}}{x-1}=\lim_{x\to(1)^-}\frac{x-\sqrt{x}}{x(x-1)}=\lim_{x\to(1)^-}\frac{\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)}{x\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}-1\right)}$$

$$=\lim_{x\to(1)^-}\frac{\sqrt{x}}{x\left(\sqrt{x}+1\right)}=\frac{1}{2}\quad par\ suite\ f_g\,'(1)\neq f_d\,'(1)\ \Leftrightarrow\ f\ n'est\ pas\ dérivable\ en\ 1$$

5) a/ $f\,'(x)=2x-2$ et $f\,'(-3)=2\times(-3)-2=-8$.

b/ $T_{-3}: y=f\,'(-3)(x+3)+f(-3)=-8(x+3)+17=-8x-7$

6) On a $\Delta: y=-5x+1$ pour que la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse x_0 est parallèle à Δ il faut que

$$f\,'(x_0)=-5\quad or\quad f\,'(x_0)=2x_0-2=-5\ \Leftrightarrow\ 2x_0=-3\ \Leftrightarrow\ x_0=-\frac{3}{2}\ et\ -\frac{3}{2}\in\left]-\infty\,,1\right[$$

Exercice 4 :

I-1) * $\cos(2x)=0\Leftrightarrow\cos(2x)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\2x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ $avec\ k\in Z\ \ donc\ S_{IR}=\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\ avec\ k\in Z\right\}$

$$*\ \cos\left(3x+\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}\Leftrightarrow\cos\left(3x+\frac{4\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}3x+\frac{4\pi}{3}=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\\3x+\frac{4\pi}{3}=-\frac{5\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}+2k\pi\\3x=-\frac{5\pi}{6}-\frac{4\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi\\3x=-\frac{13\pi}{6}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x=-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\\x=-\frac{13\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\quad S_{IR}=\left\{-\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}k\pi\ ;-\frac{\pi}{18}+\frac{2}{3}k\pi\ avec\ k\in Z\right\}$$

$$*\ \cos\left(5x-\frac{\pi}{5}\right)=\sin\left(2x-\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(2x-\frac{2\pi}{5}\right)\right)=\cos\left(-2x+\frac{\pi}{2}+\frac{2\pi}{5}\right)=\cos\left(-2x+\frac{9\pi}{10}\right)\Leftrightarrow\begin{cases}5x-\frac{\pi}{5}=-2x+\frac{9\pi}{10}+2k\pi\\5x-\frac{\pi}{5}=2x-\frac{9\pi}{10}+2k\pi\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7x=\frac{\pi}{5}+\frac{9\pi}{10}+2k\pi\\3x=\frac{\pi}{5}-\frac{9\pi}{10}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=\frac{11\pi}{10}+2k\pi\\3x=-\frac{7\pi}{10}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{11\pi}{70}+\frac{2}{7}k\pi\\x=-\frac{7\pi}{30}+\frac{2}{3}k\pi\end{cases}\Leftrightarrow S_{IR}=\left\{\frac{11\pi}{70}+\frac{2}{7}k\pi;-\frac{7\pi}{30}+\frac{2}{3}k\pi\ avec\ k\in Z\right\}$$

2) $\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)\left(2\cos x+1\right)\geq 0\quad\Rightarrow\ \sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos x=-\frac{1}{2}$

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{2\pi}{3}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{4\pi}{3}$		2π
$\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$\left(2\cos x+1\right)$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$\left(\sqrt{2}\sin x-1\right)\left(2\cos x+1\right)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$$S_{IR}=\left[\frac{\pi}{4}+2k\pi,\frac{2\pi}{3}+2k\pi\right]\cup\left[\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\frac{4\pi}{3}+2k\pi\right]$$

II-

1) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}-\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}+\cos 2x\cos\frac{\pi}{3}+\sin 2x\sin\frac{\pi}{3}=2\cos(2x)\cos\frac{\pi}{3}=2\cos(2x)\frac{1}{2}=\cos(2x)$

2) $\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos 2x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\2x=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{6}+k\pi\\x=-\frac{\pi}{6}+k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-\pi<\frac{\pi}{6}+k\pi\leq\pi\Leftrightarrow k=0\ ou\ -1\\-\pi<-\frac{\pi}{6}+k\pi\leq\pi\Leftrightarrow k=0\ ou\ 1\end{cases}$

$$S_{]-\pi,\pi]}=\left\{-\frac{\pi}{6};-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}\right\}$$

3) a/ $On\ a\quad f(x)=\frac{\cos 3x}{\cos 2x}\quad\Rightarrow\cos 2x\neq 0\quad\Rightarrow\quad D_f=IR\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi;-\frac{\pi}{4}+k\pi\ avec\ k\in Z\right\}$

b/ $f(x)=\frac{\cos 3x}{\cos 2x}\quad\Rightarrow\quad f(0)=\frac{\cos 0}{\cos 0}=\frac{1}{1}=1$

c/ $f(x)=\frac{\cos 3x}{\cos 2x}=1\quad\Leftrightarrow\cos 3x=\cos 2x\quad\Leftrightarrow\begin{cases}3x=2x+2k\pi\\3x=-2x+2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\5x=2k\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2k\pi\\x=\frac{2}{5}k\pi\end{cases}avec\ k\in Z$

$$S_{IR}=\left\{2k\pi\ ;\frac{2}{5}k\pi\ avec\ k\in Z\right\}$$