Lycée Remada Tataouine — Prof : M^r Hamdi zantour

Année Scolaire : 2017 – 2018 — Classe : 3 ème Technique

Date : 23/05/2018 — Durée : 3 heures

Corrigé du devoir de synthèse N°2

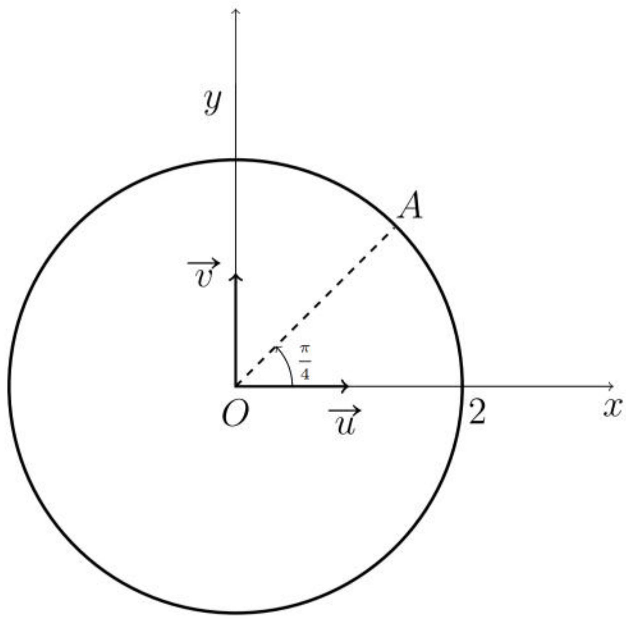
Mathématiques

Exercice 1 (5 points)

1. a) $|z_A| = |z_B| = 2$, $arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$ et $arg(z_B) = \dfrac{5\,\pi}{6}$

   b) On a : $OA = OB = 2 \Longrightarrow A, B \in \mathscr{C}_{(O,2)}$

   c)



2. $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{i-\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i} = \dfrac{\sqrt{2}\,i+\sqrt{2}-\sqrt{6}+\sqrt{6}\,i}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+i\,(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$

3. a) $z_A = 2\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\,\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\,\sin\dfrac{\pi}{4}\right) = \left[2\,;\dfrac{\pi}{4}\right]$

   $z_B = 2\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}\,i\right) = 2\left(\cos\dfrac{5\,\pi}{6}+i\,\sin\dfrac{5\,\pi}{6}\right) = \left[2\,;\dfrac{5\,\pi}{6}\right]$

   b) $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\left[2\,;\dfrac{5\,\pi}{6}\right]}{\left[2\,;\dfrac{\pi}{4}\right]} = \left[1\,;\dfrac{7\,\pi}{12}\right]$

c) D'une part : $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\left[2\,;\dfrac{5\,\pi}{6}\right]}{\left[2\,;\dfrac{\pi}{4}\right]} = \left[1\,;\dfrac{7\,\pi}{12}\right] = \cos\dfrac{7\,\pi}{12} + i\,\sin\dfrac{7\,\pi}{12}$

D'autre part : $\dfrac{z_B}{z_A} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}+i\,(\sqrt{2}+\sqrt{6})}{4}$

Par identification, on en déduit que : $\cos\dfrac{7\,\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ et $\sin\dfrac{7\,\pi}{12} = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$

Exercice 2 (3 points)

$$11 \text{ jetons} \begin{cases} 3\,N \\ 6\,R \\ 2\,V \end{cases}$$

1. Le nombre de tirages possibles est le nombre d'arrangements de 3 jetons parmi 11 jetons, donc le nombre de tirages possibles est : $A_{11}^3 = 990$.
2. Le nombre de tirages contenant 3 jetons rouges est : $A_6^3 = 120$.
3. Le nombre de tirages contenant 3 jetons qui sont de la même couleur est :
   $A_3^3 + A_6^3 = 126$.
4. Le nombre de tirages contenant un tirage tricolore est :
   $6 \times A_3^1 \times A_6^1 \times A_2^1 = 6 \times 36 = 216$.
5. Le nombre de tirages contenant au moins un jeton rouge est :
   $3 \times A_6^1 \times A_5^2 + 3 \times A_6^2 \times A_5^1 + A_6^3 = 930$.
   Autrement : aucun jeton rouge $\quad A_{11}^3 - A_5^3 = 990 - 60 = 930$.

Exercice 3 (6 points)

1. En utilisant les chiffres 9, 6, 3 et 8, on peut former : $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ nombres ayant 4 chiffres distincts.
2. Un tiercé, c'est 3 personnes.
   Pour la première personne, il y a 20 choix.
   Pour la deuxième personne, il y a 19 choix.
   Pour la troisième personne, il y a 18 choix.
   Le nombre de tiercés est donc : $A_{20}^3 = 6840$.
3. a) $A_{26}^3 = 15600$.
   b) $26 \times 26 \times 26 = 26^3 = 17576$.
4. Il y a : $2^{10} = 1024$ façons différentes de répondre à cet examen.
5. Le nombre de résultats possibles est : $2^3 \times 6^2 = 8 \times 36 = 288$.

6. On a : 6 voyelles et 20 consonnes. On peut former : $20 \times 6 = 120$ mots.
7. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des nombres entiers positifs composés de 3 chiffres.

   $\#\mathscr{A} = 9 \times 10 \times 10 = 900$.

Exercice 4 (3 points)

1. $|z_B| = |z_C| = 4$, On a : $OB = OC = 4 \Longrightarrow B, C \in \mathscr{C}_{(O,4)}$
2. a) On a : $z_A = \dfrac{z_B - z_C}{2} = 2\,i\,\sqrt{3}$.

   $|z_A - z_B| = 2 \Rightarrow AB = 2$.

   $|z_A - z_C| = \sqrt{52} \Rightarrow AC = \sqrt{52}$.

   $|z_B - z_C| = 4\sqrt{3} \Rightarrow BC = 4\sqrt{3}$.

   b) On a : $AC^2 = AB^2 + BC^2$ car : $52 = 4 + 48$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore le triangle ABC est rectangle en B.

Exercice 5 (3 points)

1. $U_1 = 1$, $U_2 = \sqrt{2}$ et $U_3 = \sqrt{3}$.

   On a : $\dfrac{U_2}{U_1} = \sqrt{2}$ et $\dfrac{U_3}{U_2} = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

   On a : $\sqrt{2} \neq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \Rightarrow (U_n)$ n'est pas une suite géométrique.
2. a) Montrons cette propriété par récurrence.

   Pour $n = 1$, on a : $U_1 = 1 \neq 0$, supposons que l'on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $U_n \neq 0$ et montrons que : $U_{n+1} \neq 0$.

   On a : $U_n \neq 0 \Rightarrow U_n^2 \neq 0 \Rightarrow U_n^2 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 1 \Rightarrow U_{n+1} \neq 0$.

   Donc, par récurrence, on a : $\forall\, n \in \mathbb{N}^\star$, $U_n \neq 0$.

   b) Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\dfrac{1 + U_n^2}{U_n^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{U_n^2} + 1}$

   c) Pour tout $n \geqslant 1$, on a : $1 + \dfrac{1}{U_n^2} > 1$ car $U_n^2 > 0$.

   Donc $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = \sqrt{\dfrac{1}{U_n^2} + 1} > 1$, or les termes de la suite (U_n) sont strictement positifs $\Rightarrow (U_n)$ est strictement croissante sur $\mathbb{N}^\star$.