

DEVOIR DE SYNTHÈSE N°2

MATHÉMATIQUES

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes une seule réponse est correcte, choisir la bonne case.

Questions	Réponses
<p>1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x - 1 - \frac{x^2 + 2}{x^2 - x + 2}$</p> <p>Au voisinage de $-\infty$, la courbe \mathcal{C}_f de f admet comme asymptote oblique la droite d'équation</p>	<p><input type="checkbox"/> $y = 2x - 1$</p> <p><input type="checkbox"/> $y = 2x$</p> <p><input type="checkbox"/> $y = 2(x - 1)$</p>
<p>2. Soit le nombre complexe $z = 1 - i\sqrt{3}$.</p> <p>Un argument du nombre complexe z^{2017} est égal à</p>	<p><input type="checkbox"/> $\frac{5\pi}{3}$</p> <p><input type="checkbox"/> $\frac{2\pi}{3}$</p> <p><input type="checkbox"/> $\frac{\pi}{3}$</p>
<p>3. Soient $z \in \mathbb{C}$, E un point d'affixe $(1 - i)^2$, F un point d'affixe $(1 + i)^2$ et M un point d'affixe z.</p> <p>L'ensemble : $\{M(z); \bar{z} - 2i = z - 2i \}$ est</p>	<p><input type="checkbox"/> une droite</p> <p><input type="checkbox"/> un cercle</p> <p><input type="checkbox"/> vide</p>
<p>4. Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 + 6x^2 - 5x - 6$</p> <p>La courbe \mathcal{C}_f de f admet un point d'inflexion au point d'abscisse</p>	<p><input type="checkbox"/> $x = 2$</p> <p><input type="checkbox"/> $x = -6$</p> <p><input type="checkbox"/> $x = -2$</p>

Exercice 2 (5 points)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé (O, \vec{u}, \vec{v}) , on considère les points E, F et A d'affixes respectives : $z_E = -2 - i$, $z_F = -i + \sqrt{3}$ et $z_A = -2 + 2i$

1. a/ Vérifier que le point F appartient à un cercle que l'on caractérisera.
- b/ Placer soigneusement les points E, F et A .
- c/ Montrer que AEF est un triangle rectangle.

2. a/ Déterminer la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_F}{z_A}$

b/ Montrer, en utilisant les formes polaires de z_F et z_A , que l'on a :

$$\frac{z_F}{z_A} = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{11\pi}{12} \right].$$

c/ En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

3. a/ Déterminer le nombre complexe z_D affixe du point D pour que le quadrilatère $AEDF$ soit un parallélogramme.

b/ Soient $z \in \mathbb{C}$ et M un point d'affixe z , caractériser puis construire l'ensemble :

$$E = \left\{ M(z); \arg(z + 4i - \sqrt{3}) = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 3 (5 points)

Soient $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme égal à 1 et de raison égale à 2 et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite réelle définie par :

$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = 2V_n + U_n, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1. a/ Déterminer le terme général de la suite U et montrer qu'elle est divergente.

b/ Montrer que la suite V n'est ni arithmétique ni géométrique.

c/ Montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_n > 0$ et en déduire que V est strictement croissante.

d/ Montrer par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = n2^{n-1}$, en déduire que V diverge.

2. On définit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant : $W_n = \frac{V_n}{U_n}$

a/ Montrer que W est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b/ Exprimer W_n en fonction de n puis retrouver V_n en fonction de n .

Exercice 4 (6 points)

Soient f et g les fonctions définies respectivement sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 4x - 5$$

On désigne respectivement par \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g les courbes de f et de g dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

1. a/ Calculer $g'(x)$ puis dresser le tableau de variation de g .

b/ Etudier la nature des branches infinies à \mathcal{C}_g .

c/ Montrer que la droite $\Delta : x = 2$ est un axe de symétrie de \mathcal{C}_g .

d/ Tracer \mathcal{C}_g .

2. Etudier $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.
3. a/ Montrer que, $\forall x \neq 2$, $f'(x) = \frac{g(x)}{(2-x)^2}$
b/ Dresser le tableau de variation de f .
4. a/ Vérifier, pour tout $x \neq 2$, $f(x) = \frac{9}{x-2} + x + 3$
b/ En déduire que \mathcal{C}_f admet une asymptote oblique Δ que l'on déterminera.
c/ Montrer que la courbe \mathcal{C}_f admet le point $I(2, 5)$ comme centre de symétrie.
5. a/ Etudier la position relative de Δ et \mathcal{C}_f .
b/ Tracer \mathcal{C}_f .
6. Discuter graphiquement et suivant le paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation : $f(x) = m$.
-

BON TRAVAIL