Durée de l'épreuve : 3H

Devoir de synthèse n°3

Classes : 3ST 1 & 2

Prof: Dhaouadi Nejib

Exercice n°1

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte.
L'élève doit indiquer sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.
1 point pour une réponse correcte, 0 point pour une réponse fausse ou absence de réponse.

1°) Le nombre des applications d'un ensemble de n éléments ($n \geq 2$) dans un ensemble d'un seul élément est égal à:

a) $n!$ b) n c) 1

2°) Le nombre de triplets d'un ensemble de quatre éléments est égal à :

a) 64 b) 24 c) 4.

3°) Dans le développement de $(1+x)^{12}$ ($x \in \mathbb{R}$), le coefficient de x^{10} est :

a) 132 b) 120 c) 66.

Exercice n°2

Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1) a) Montrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n on a: $0 \leq u_n \leq 1$.

b) En déduire le sens de variation de (u_n)

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de n et puis u_n en fonction de n.

c) Déterminer alors la limite de la suite (u_n).

Exercice n°3

Une urne contient deux boules blanches portant respectivement les numéros 1 et 4 et quatre boules noires portant respectivement les numéros 2, 3, 5 et 7.

1) On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

Quelle est la probabilité de chacun des évènements suivants :

A : " Les deux boules tirées portent des numéros impairs "

B : " Les deux boules tirées sont de la même couleur "

C : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs et sont de la même couleur".

D : "Les deux boules tirées portent des numéros impairs ou sont de la même couleur ".

2) On tire successivement et avec remise deux boules de l'urne. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

E : "Les deux boules tirées sont de parités différentes".

F : " Obtenir au moins une boule noire ".

Exercice n°4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Soient z un nombre complexe différent de i et M son image dans le plan complexe.

On pose $t = \dfrac{z}{z-i}$

1) Montrer que si $z = x + iy$ *où x et y sont des réels alors:*

$$t = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{x}{x^2+(y-1)^2}.$$

2) Déterminer alors les ensembles suivants:

a) $E = \left\{M(z) \text{ tel que } t \in \mathbb{R}\right\}$

b) $F = \left\{M(z) \text{ tel que } t \text{ est imaginaire pur}\right\}$

Exercice n°5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ *on donne la droite D passant par le point* $A(0,1,1)$ *et de vecteur directeur* $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ *et la droite* D' *admettant comme système d'équations cartésiennes :* $\begin{cases} x-y+z-1=0 \\ x+y-2z+1=0 \end{cases}$.

1) Donner une représentation paramétrique de la droite D'.

2) Montrer que les droites D et D' *ne sont pas coplanaires.*

3) Vérifier que $x+3y-5z+2=0$ *est une équation cartésienne du plan P parallèle à* D' *et contenant D.*

4) On donne les points $H\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{5},\dfrac{3}{5}\right)$ *et* $K\left(\dfrac{13}{35},\dfrac{4}{35},\dfrac{26}{35}\right)$.

a) Vérifier que: $H \in D$, $K \in D'$ *et que la droite (HK) est perpendiculaire à chacune des droites D et* D'

Correction du devoir

Exercice n°1

1°) Le nombre des applications d'un ensemble de n éléments ($n \geq 2$) dans un ensemble d'un seul élément est égal à $1^n = 1$ c'est **la réponse c)**

2°) Le nombre de triplets d'un ensemble de quatre éléments est égal au nombre des applications d'un ensemble de trois éléments dans un ensemble de quatre éléments donc égal à $4^3 = 64$.

Alors la réponse correcte est **la réponse a)**

3°) On sait, d'après la formule du binôme, que : $(1+x)^{12} = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k}\left(x^k \times 1^{12-k}\right) = \sum_{k=0}^{12} C_{12}^{k} x^k$

Donc, pour $k = 10$ obtient le coefficient $C_{12}^{10} = \dfrac{12\,!}{10\,!\,2\,!} = \dfrac{12 \times 11}{2} = 66$

D'où la réponse correcte est **la réponse c)** .

Exercice n°2

1) a) Pour $n = 0$, on a : $u_0 = 0 \in [0,1]$ donc vrai

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 \leq u_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

$$0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow 2 \leq u_n + 2 \leq 3 \Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{u_n+2} \leq \frac{1}{2} \qquad (*)$$

D'autre part $0 \leq u_n \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 2u_n \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 2u_n + 1 \leq 3 \quad (**)$

Faisant le produit membre à membre des deux encadrements (*) et (**).

On obtient $\dfrac{1}{3} \leq u_{n+1} \leq \dfrac{3}{2}$. Désolé ce n'est pas le résultat voulu!!!

Bien sure, je l'est fait ici exprès. Vous remarquez alors que cette méthode classique ne donne pas, dans certain cas, le résultat désiré, et pour cela il faut une méthode plus efficace.

Il suffit d'écrire u_{n+1} autrement: $u_{n+1} = \dfrac{2(u_n+2)-3}{u_n+2} = 2 - \dfrac{3}{u_n+2}$

On a, d'après (*), $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{u_n+2} \leq \dfrac{1}{2}$ donc $-\dfrac{3}{2} \leq -\dfrac{3}{u_n+2} \leq -1$

D'où $2 - \dfrac{3}{2} \leq 2 - \dfrac{3}{u_n+2} \leq 2 - 1$ ou encore $0 \leq \dfrac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$. Cqfd.

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n+1}{u_n+2} - u_n = \dfrac{2u_n + 1 - u_n^{\,2} - 2u_n}{u_n+2} = \dfrac{(1-u_n)(1+u_n)}{u_n+2}$.

Et comme $0 \leq u_n \leq 1$, alors $1 - u_n \geq 0$, $1 + u_n \geq 0$ et $u_n + 2 > 0$.

D'où $u_{n+1}-u_n \geq 0$ et la suite (u_n) est croissante.

2) a) $v_{n+1}=\dfrac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+1}=\dfrac{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}-1}{\dfrac{2u_n+1}{u_n+2}+1}=\dfrac{2u_n+1-u_n-2}{2u_n+1+u_n+2}=\dfrac{u_n-1}{3(u_n+1)}=\dfrac{1}{3}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0=\dfrac{u_0-1}{u_0+1}=-1$.

b) $v_n=v_0\times\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

$v_n=\dfrac{u_n-1}{u_n+1}\Leftrightarrow u_nv_n+v_n=u_n-1\Leftrightarrow u_n(v_n-1)=-v_n-1\Leftrightarrow u_n=-\dfrac{v_n+1}{v_n-1}$.

Et enfin $u_n=-\dfrac{-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n+1}{-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n-1}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$

c) Comme $\dfrac{1}{3}\in\left]-1,1\right[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n=0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\dfrac{1}{1}=1$.

Exercice n°3

1) $Card\Omega=C_6^2=\dfrac{6\,!}{2\,!\,4\,!}=\dfrac{6\times5}{2}=15$

$CardA=C_4^2=\dfrac{4\times3}{2}=6$, donc $p(A)=\dfrac{6}{15}=\dfrac{2}{5}$.

«Tirer deux boules de meme couleur» $\Leftrightarrow$ «Tirer deux boules noires ou deux boules blanches»

$CardB=C_4^2+C_2^2=1+6=7$ donc $p(B)=\dfrac{7}{15}$

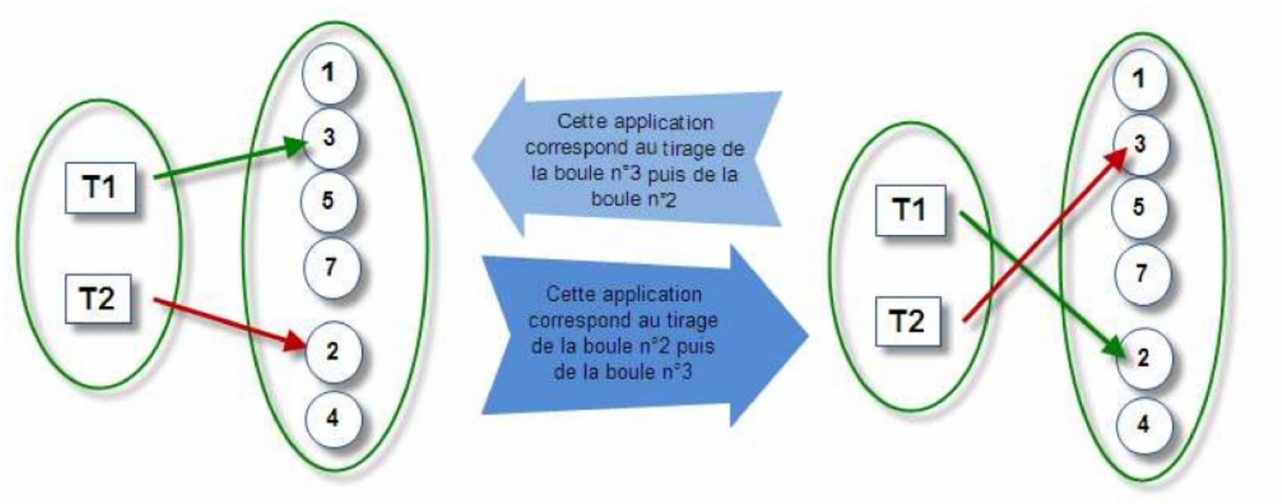
C est équivalent à l'événement «Tirer deux boules noires portant des numéros impairs»

$CardC=C_3^2=3$, donc $p(C)=\dfrac{3}{15}=\dfrac{1}{5}$. Remarquer que $C=A\cap B$.

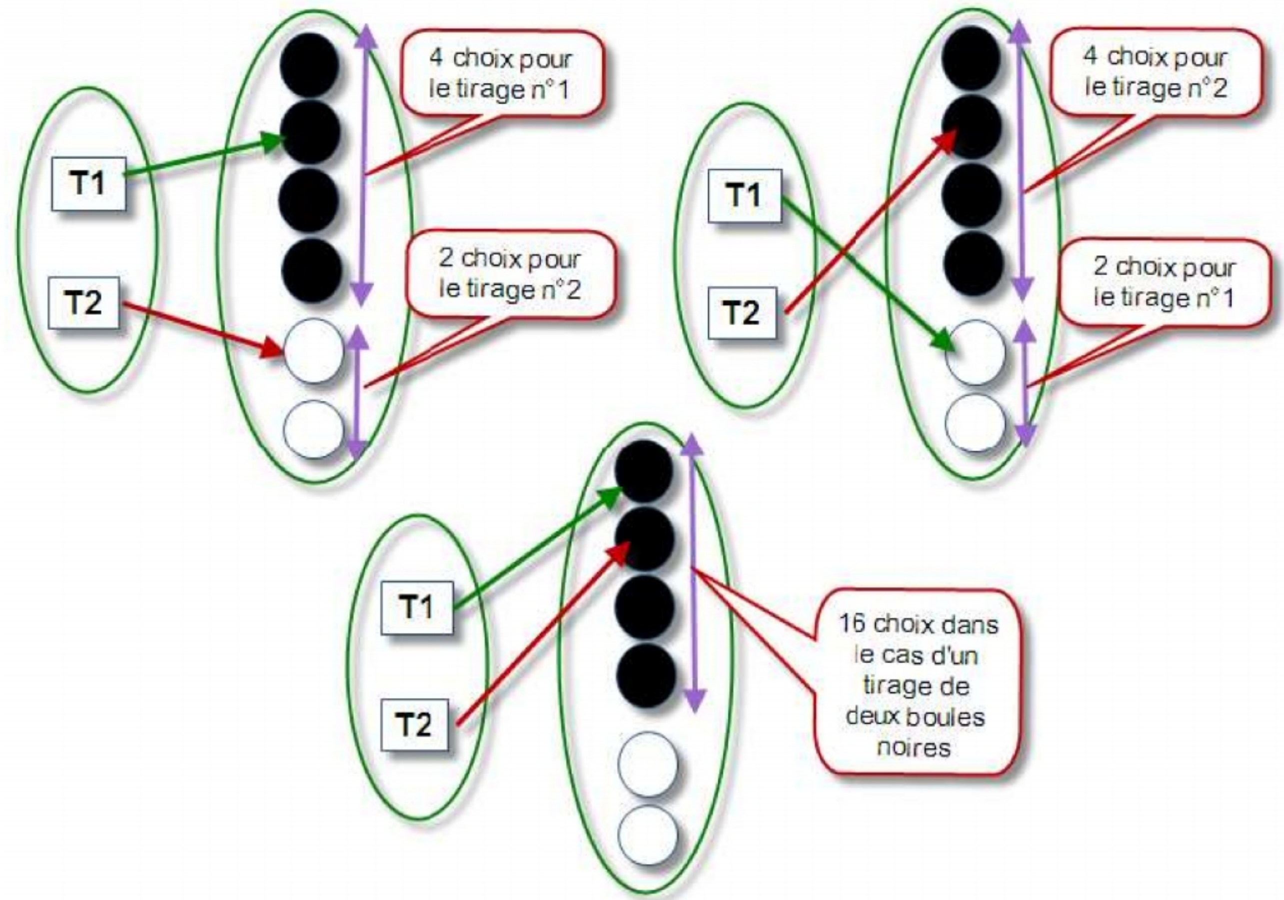
$p(D)=p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)=\dfrac{2}{5}+\dfrac{7}{15}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{10}{15}=\dfrac{2}{3}$.

2) Un tirage successif et avec remis de deux boules parmi six boules est assimilé à une application d'un ensemble de deux éléments dans un ensemble de six éléments.

$Card\Omega=6^2=36$



$$CardE = 2\times 2^1 \times 4^1 = 16 \quad donc \quad p(E) = \frac{CardE}{Card\Omega} = \frac{16}{6^2} = \frac{4}{9}.$$



$$CardF = 2\times\frac{4^1\times 2^1}{6^2} + \frac{4^2}{6^2} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

Exercice n°4

$$1)\ t = \frac{z}{z-i} = \frac{x+iy}{x+i(y-1)} = \frac{(x+iy)\left[x-i(y-1)\right]}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2-ix(y-1)+ixy+y(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$$

$$= \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{xy-xy+x}{x^2+(y-1)^2} = \frac{x^2+y^2-y}{x^2+(y-1)^2} + i\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

2) a) $t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow Im(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2+(y-1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0 \text{ et } (x,y) \neq (0,1)$

Donc E est l'axe des ordonnées privé du point A(0,1).

b) t est imaginaire pur $\Leftrightarrow R(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-y=0 \\ (x,y)\neq(0,1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0 \\ (x,y)\neq(0,1) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\ (x,y)\neq(0,1) \end{cases}$$

On vérifie bien que le point A(0,1) appartient au cercle (C).

Donc F est le cercle (C) de centre le point $I\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *et de rayon* $\frac{1}{2}$, *privé du point A(0,1).*

Exercice n°5

1) On pose $z = \alpha \in \mathbb{R}$.

$M(x,y,z) \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1-\alpha \\ x+y=-1+2\alpha \\ z=\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x=\alpha \\ x-y=1-\alpha \\ z=\alpha \end{cases}$

Il suffit de faire la som e des deux égalités

ou encore $\begin{cases} x=\frac{\alpha}{2} \\ y = x-1+\alpha = -1+\frac{3\alpha}{2} \\ z=\alpha \end{cases}$ Donc $\boxed{D' : \begin{cases} x=\frac{\alpha}{2} \\ y=-1+\frac{3}{2}\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R}) \\ z=\alpha \end{cases}}$

2) $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D et $\vec{v}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D'

$\begin{vmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 2 & \frac{3}{2} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}-1 \neq 0$ donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. (*)

Une représentation paramétrique de D: $\begin{cases} x = -\beta \\ y = 1 + 2\beta \\ z = 1 + \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$

$$M(x,y,z) \in D \cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta = \dfrac{\alpha}{2} \\ y = 1 + 2\beta = -1 + \dfrac{3\alpha}{2} \\ z = 1 + \beta = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2\beta \\ 1 + 2\beta = -1 - 3\beta \Rightarrow \beta = \dfrac{-1}{3} = \dfrac{-2}{5} \\ 1 + \beta = -2\beta \end{cases}$$

Ce qui est impossible et permet d'affirmer que $D \cap D' = \varnothing$. *(**)*

D'après (*) et (**) D et D' *sont non coplanaires.*

$$3)\ M(x,y,z) \in P \Leftrightarrow det\left(\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AM}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -1 & \dfrac{1}{2} & x \\ 2 & \dfrac{3}{2} & y-1 \\ 1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}(z-1) + 2x + \frac{1}{2}(y-1) - \frac{3}{2}x + (y-1) - 2\frac{1}{2}(z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{3}{2}z + \frac{3}{2} + 2x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x + y \cancel{-1} - z \cancel{+1} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}y - \frac{5}{2}z - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 5z - 1 = 0$$

4)

$$\begin{cases} \dfrac{2}{5} = -\beta \\ \dfrac{1}{5} = 1 + 2\beta \\ \dfrac{3}{5} = 1 + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\dfrac{2}{5} \\ \beta = -\dfrac{2}{5} \\ \beta = -\dfrac{2}{5} \end{cases} \quad donc \quad H\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5}\right) \in D$$

$$\begin{cases} \dfrac{13}{35} = \dfrac{\alpha}{2} \\ \dfrac{4}{35} = -1 + \dfrac{3}{2}\alpha \\ \dfrac{26}{35} = \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \dfrac{26}{35} \\ \alpha = \dfrac{2}{3}\dfrac{39}{35} = \dfrac{26}{35} \\ \alpha = \dfrac{26}{35} \end{cases} \quad donc \quad K\left(\frac{13}{35}, \frac{4}{35}, \frac{26}{35}\right) \in D'$$

$$\overrightarrow{HK}\begin{pmatrix} -\frac{1}{35} \\ -\frac{3}{35} \\ \frac{5}{35} \end{pmatrix} .$$

$$\overrightarrow{HK}\cdot\vec{u} = \frac{1}{35} - \frac{6}{35} + \frac{5}{35} = 0 \Rightarrow (HK) \perp D$$

$$\overrightarrow{HK}\cdot\vec{v} = -\frac{1}{35}\frac{1}{2} - \frac{3}{35}\frac{3}{2} + \frac{5}{35} = \frac{-1-9+10}{70} = 0 \Rightarrow (HK) \perp D'$$