

L. Ali Bourguiba Kalaa Kébira
Pof : Abdesslem raoudha
Le 31 /5 /2011

DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 3

Exercice 1 : (4 points)

Cocher la bonne réponse

1) Soit $U_n = -4 \left(\frac{\pi}{4}\right)^n$, (U_n) a pour limite :	a) $-\infty$	b) 0	c) $+\infty$
2) Soit $V_n = n - \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$, (V_n) est :	a) croissante	b) décroissante	c) constante
3) Soit $W_n = \frac{3n+4}{10}$, $n \in \mathbb{N}$, (W_n) est une suite :	a) arithmétique	b) géométrique	c) constante
4) Dans le développement de $(x+1)^8$, le coefficient de x^5 est :	a) 35	b) 56	c) 70
5) Le nombre C_n^2 ($n \in \mathbb{N}$, $n > 2$) est égal à :	a) $\frac{n}{2}$	b) $\frac{n!}{2!}$	c) $\frac{n(n-1)}{2}$
6) Le nombre A_n^{n-1} ($n \in \mathbb{N}^*$) est égal à :	a) n	b) 1	c) n!
7) A et B sont deux événements incompatibles, alors :	a) $p(A) = 1 - p(B)$	b) $p(A \cup B) = p(A)$	c) $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$
8) On lance trois dés différents dont les faces de chacun sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Il y a :	a) A_6^3 résultats	b) C_6^3 résultats	c) 6^3 résultats

Exercice 2 : (4 points)

Une urne contient **10 boules** indiscernables au toucher : **5 rouges**, **4 noires** et **1 blanche**

1) On tire **simultanément 4 boules** de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des événements :

A « Obtenir la boule blanche »

B « Obtenir 4 boules de même couleur »

C « Obtenir au moins une boule rouge »

D « Obtenir 2 couleurs »

2) On tire **successivement et avec remise 4 boules** de l'urne. Déterminer la probabilité de chacun des événements :

E « Obtenir 4 boules de même couleur »

F « Obtenir 2 boules rouges et 2 boules noires »

G « La boule blanche est tirée pour la première fois au 3^{ième} tirage »



Exercice 3 : (6 points)

Soit le cube $OADBCEGF$ et soit les points R, S, T vérifiant $\overrightarrow{OR} = 2\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OS} = 2\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{DT} = 2\overrightarrow{DG}$

1)a) Montrer que $\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{AB}$ et que D est le milieu de $[RS]$

b) Montrer que $\overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{EF}$, en déduire la position de (EF) et (RS)

On considère maintenant le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$

2)a) Montrer que $R(2, 0, 0)$, $S(0, 2, 0)$ et $T(1, 1, 2)$

b) vérifier que C, R et S sont non alignés

3)a) Soit le plan $P = (CRS)$, montrer que $P: x + y + 2z - 2 = 0$

b) Montrer que $(OT) \perp P$

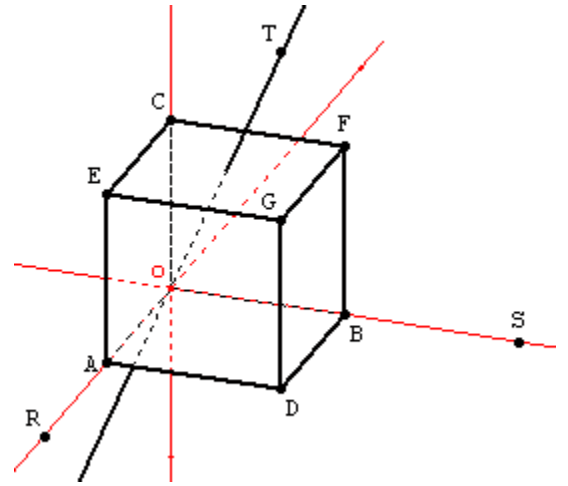
c) La droite (OT) coupe P en H , déterminer les coordonnées de H

d) Déterminer de deux manières différentes la distance de O à P

4) Soit Q le plan passant par C et de vecteur normal $\vec{n}_Q = \vec{i} - 5\vec{j} + 2\vec{k}$

a) Ecrire une équation cartésienne de Q

b) Montrer $Q \perp P$ et que $Q \cap P = (RC)$



Exercice 4 : (6 points)

Soit la suite réelle (U_n) définie par : $U_0 = 4$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = \frac{4U_n + 2}{U_n + 3}$ et soit $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1}$

1) Soit $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$, $x \in]-3, +\infty[$. On note C sa représentation graphique dans un repère orthonormé et $D: y = x$

a) Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variation de f

b) Tracer C et D dans le même repère

c) En utilisant C et D , placer les 4 premiers termes de la suite sur l'axe des abscisses

Que peut on conjecturer pour la monotonie et la convergence de (U_n)

2)a) Montrer par récurrence que pour tout n , $U_n \geq 2$

b) Montrer que $U_{n+1} - U_n = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + 3}$. Déduire le sens de variation de (U_n)

3) a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

c) Calculer les limites de (V_n) et (U_n)

Correction :

Exercice 1 :

1	2	3	4	5	6	7	8
b	a	a	b	c	c	c	c

Exercice 2 :

$$1) p(A) = \frac{C_1^1 C_9^3}{C_{10}^4} = \frac{84}{210}, \quad p(B) = \frac{C_4^4 + C_5^4}{210} = \frac{6}{210}, \quad p(C) = 1 - p(\bar{C}) = 1 - \frac{C_5^4}{210} = \frac{115}{210},$$

$$p(D) = \frac{C_5^2 C_4^2 + C_5^3 C_4^1 + C_5^1 C_4^3 + C_5^3 C_1^1 + C_4^3 C_1^1}{210} = \frac{134}{210} \quad (2R2N \text{ ou } 3R1N \text{ ou } 1R3N \text{ ou } 3R1B \text{ ou } 3N1B)$$

$$2) p(E) = \frac{5^4 + 4^4 + 1^4}{10^4} = \frac{882}{10000} = \frac{441}{5000}, \quad p(F) = 6 \frac{5^2 4^2}{10000} = \frac{6}{25}, \quad p(G) = \frac{9 \cdot 9 \cdot 1 \cdot 10}{10000} = \frac{81}{1000}$$

Exercice 3 :

$$1) a) \overrightarrow{RD} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{RO} + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

$$\text{de même } \overrightarrow{DS} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OS} = \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{AO} + 2\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$$

on déduit que $\overrightarrow{RD} = \overrightarrow{DS}$ et par suite D est le milieu de [RS]

$$b) \overrightarrow{RS} = 2\overrightarrow{RD} = 2\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{EF} \text{ donc (EF) et (RS) sont parallèles}$$

$$2) a) OR = 2 OA \text{ donc } R(2,0,0), OS = 2 OB \text{ donc } S(0,2,0)$$

On D(1, 1, 0) et G(1, 1, 1) et on pose D(x, y, z),

$$\overrightarrow{DT} = 2\overrightarrow{DG} \text{ eq } \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ d'où } T(1,1,2)$$

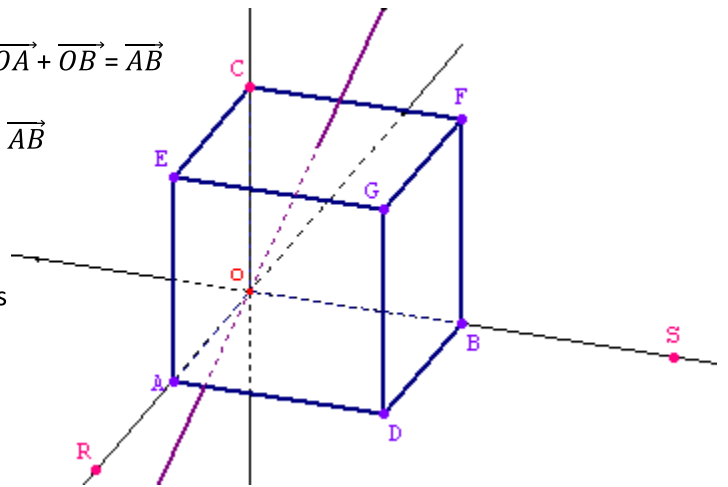
b) On a $\overrightarrow{CR} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \overrightarrow{CS} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ comme $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$ donc \overrightarrow{CR} et \overrightarrow{CS} ne sont pas colinéaires et par suite les points C, R et S ne sont pas alignés

$$3) a) M(x, y, z) \in (CRS) \text{ eq } \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CR} \text{ et } \overrightarrow{CS} \text{ sont coplanaires eq } \det(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CR}, \overrightarrow{CS}) = 0$$

$$\text{eq } \begin{vmatrix} x & 2 & 0 \\ y & 0 & 2 \\ z-1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{eq } 2x + 2y + 4z - 4 = 0 \quad \text{eq } x + y + 2z - 2 = 0$$

$$b) \text{ on a } \overrightarrow{OT} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est normal à (CRS) donc } (OT) \perp (CRS), (OT) : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha + 2 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

$$c) H(x, y, z) \in (OT) \cap (CRS) \text{ eq } : \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha + 2 \end{cases} \quad \text{et } x + y + 2z - 2 = 0$$



$$\text{eq : } \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = \alpha + 1 \\ z = 2\alpha + 2 \end{cases} \quad \text{et } (\alpha + 1) + (\alpha + 1) + 2(2\alpha + 2) - 2 = 0$$

$$\text{eq } \alpha = \frac{-2}{3}, x = \frac{1}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{2}{3} \quad \text{donc } H\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$d(O,P) = \frac{|0+0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2+2^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3} \quad \text{et d'autre part } d(O,P) = OH = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$4)a) Q: x - 5y + 2z + d = 0 \quad \text{et } C \in Q \quad \text{donc } 2 + d = 0 \quad \text{donc } d = -2 \quad \text{donc } Q: x - 5y + 2z - 2 = 0$$

$$b) \vec{n}_Q \cdot \vec{n}_P = 1 - 5 + 4 = 0 \quad \text{donc } Q \perp P; \quad (RC) \subset P \quad \text{et } (RC) \subset Q \quad (\text{car } 2 - 0 + 0 - 2 = 0 \Rightarrow R \in Q \quad \text{et } 0 - 0 + 2 - 2 = 0 \Rightarrow C \in Q)$$

Exercice 4 :

$$1)a) f'(x) = \frac{10}{(x+3)^2} > 0 \text{ d'où}$$

b)

x	-3	$+\infty$
f'(x)		+
f(x)		↗ 4
	$-\infty$	

c) Il paraît que (U_n) est décroissante et convergente.

$$2)a) * \text{ pour } n = 0, U_0 = 4 \geq 2$$

* On suppose $U_n \geq 2$ et montrons que $U_{n+1} \geq 2$

$$\text{On a } U_{n+1} - 2 = \frac{2(U_n - 2)}{U_n + 3} \geq 0 \quad \text{car } U_n \geq 2$$

$$\text{donc } U_{n+1} \geq 2$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n \geq 2$

$$b) U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n + 2}{U_n + 3} - \frac{U_n(U_n + 3)}{U_n + 3} = \frac{-(U_n)^2 + U_n + 2}{U_n + 3} = \frac{-(U_n + 1)(U_n - 2)}{U_n + 3} \leq 0 \quad (\text{car } U_n \geq 2) \quad \text{donc } (U_n) \text{ est décroissante}$$

$$3)a) V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 1} = \frac{\frac{4U_n + 2}{U_n + 3} - 2}{\frac{4U_n + 2}{U_n + 3} + 1} = \frac{(4U_n + 2) - 2(U_n + 3)}{(4U_n + 2) + (U_n + 3)} = \frac{2(U_n - 2)}{5(U_n + 1)} = \frac{2}{5} V_n \quad \text{Donc } (V_n) \text{ est une suite géométrique de raison } q = \frac{2}{5}$$

$$b) V_n = V_0 \cdot q^n = \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

$$V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 1} \quad \text{eq } V_n(U_n + 1) = U_n - 2 \quad \text{eq } V_n U_n + V_n = U_n - 2 \quad \text{eq } U_n(V_n - 1) = -V_n - 2 \quad \text{eq } U_n = \frac{-V_n - 2}{V_n - 1} \quad \text{d'où } U_n = \frac{-2 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{-1 + \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}$$

$$c) \lim V_n = 0 \quad \text{car } -1 < \frac{2}{5} < 1 \quad \text{et } \lim U_n = \frac{-2 - 0}{-1 + 0} = 2$$

