Série :
suites réelles – Droites et plans de l'espace

Exercice N°1 :

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 1}{U_n + 2} \end{cases}$.

1-/ Calculer U_1 et U_2 .Puis vérifier que U est ni arithmétique ni géométrique.

2-/ a) Vérifier que : $U_{n+1} = 2 - \dfrac{3}{U_n + 2}$.

b) Montrer que pour tout $n \in IN$; on a : $0 \leq U_n \leq 1$.

c) Etudier la monotonie de la suite U.

3-/ On considère la suite V définie sur IN par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1}$.

a) Montrer que V est une suite géométrique.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n .

c) Soit $S_n = V_0 + V_1 + ... + V_{n-1}$ Calculer S_n en fonction de n.

d) Calculer S tel que : $S = \sum_{k=5}^{8} (V_k + 2 - 3k)$.

e) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} V_n$.

4-/ Soit la suite W définie par : $\begin{cases} W_0 = 0 \\ W_{n+1} = \dfrac{1}{3} W_n + V_n \end{cases}$.

Et la suite T définie sur IN par $T_n = \dfrac{W_n}{V_n}$

a) Montrer que T est une suite arithmétique.

b) Exprimer W_n en fonction de n .

c) Montrer que : $S_n = \dfrac{W_0}{V_0} + \dfrac{W_1}{V_1} + ... + \dfrac{W_n}{V_n} = \dfrac{3}{2} n(n+1)$

Exercice N°2:

Soit $(u_n)_{n \in IN}$ la suite réelle définie par : $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - u_n^2}}$

1) *a* – Montrer que pour tout $n \in IN$, on a : $0 \leq u_n < \sqrt{3}$.

b – Montrer que u est une suite croissante

c – En déduire que u est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur IN par : $v_n = \dfrac{u_n^{\,2}}{3 - u_n^2}$

a – Montrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison 1.
b – Exprimer v_n En fonction de n ; En déduire que u_n en fonction de n.
c – En déduire la limite de (u_n).

Exercice N°3 :

Soit $R=(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ un repère cartésien de ξ.

On donne le point $A(-2,0,1)$ et les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.

1-/ On note P le plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
a) Donner une représentation paramétrique de P.
b) Montrer que : $3x+y+2z+4=0$ est une équation cartésienne du plan P.

2-/ Donner une représentation paramétrique de la droite (D) passant par A et perpendiculaire à P.

3-/ Soit le plan Q dont une équation cartésienne est $x-y+1=0$.
a) Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) intersection des plans P et Q.
b) Montrer que les droites (D) et (Δ) ne sont pas coplanaires.

Exercice N°4 :

Soit R = $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé de l'espace ξ. On donne les points $A(1,2,0)$ et $B(-1,0,1)$

1. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).
2. Soit la droite $D:\begin{cases}x=\beta+1\\y=3\\z=-\beta\end{cases}$; $\beta\in IR$

   Montrer que D et (AB) ne sont pas coplanaires.
3. Soit P le plan contenant (AB) et parallèle à D.

   Montrer qu'une équation cartésienne de P est : $2x-y+2z=0$.
4. On considère le plan Q d'équation : $x-z-2=0$

a) Montrer que P et Q sont perpendiculaires.
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\Delta=P\cap Q$.

5. Soit le point $I(d+1,-d,2)$ (d un paramètre réel)

a) Déterminer la valeur de d pour que $I\in Q$.
b) On prend $d=3$

Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ' qui passe par I et perpendiculaire à Q.