

Exercice 1: (4pts)

Donner la réponse exacte.

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} = :$ a) 0 ; b) $\frac{1}{2}$; c) 1

2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x} = :$ a) $\frac{1}{2}$; b) 1 ; c) 2

3) Le nombre des anagrammes du mot ESSENTIEL est :

a) $9!$; b) $9! - (2! + 3!)$; c) $\frac{9!}{2! \times 3!}$

4) Le nombre de tous les ensembles d'un ensemble fini de cardinal n est :

a) 2^n ; b) n^2 ; c) $C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n$

5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par O et de vecteur normal \vec{k} est :

a) $z = 0$; b) $x + y = 0$; c) $x + y = z$.

6) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient

$$(\Delta): \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad (\Delta'): \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 3 - \beta \\ z = \frac{1}{2}\beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

a) $(\Delta) \perp (\Delta')$; b) (Δ) strictement parallèle à (Δ') ; c) (Δ) et (Δ') sont confondues.

Exercice 2 : (5pts)

On considère la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \sin(2x + \frac{2\pi}{3})$

1) a) Montrer que f est périodique de période π .

b) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

2) a) Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

b) Tracer (C_f) courbe représentative de la restriction de f sur $[-\pi, \pi]$.

3) Soit g la fonction définie sur \mathbb{R} par : $g(x) = \cos(2x + \frac{2\pi}{3})$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $g(x) = f(x + \frac{\pi}{4})$

b) En déduire une constricton de (C_g) courbe représentative de la restriction de g sur $[-\pi, \pi]$.

Exercice 3: (2pts)

On lance un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soient les deux événements suivants :

A : « Obtenir un multiple de 3 » ; B : « Obtenir un nombre supérieure ou égale à 3 »

On suppose que $p_1 = 3p_6$ et que $p_1 = p_2 = p_4 = p_5 = a$

(Où p_i est la probabilité d'apparition de la face numéro i) et que $p(A) = b$.

1) Déterminer a et b sachant que $p(B) = \frac{3}{5}$.

2) En déduire $p(\{3\})$.

Exercice 4: (5pts)

Dans une bonbonnière il ya 9 bonbons : 3 caramels, 2 mentholés et 4 aux chocolats.

1) On prend au hasard 3 bonbons.

a) Dénombrer les tirages possibles.

b) Calculer la probabilité des évènements suivants :

A : « Obtenir 3 caramels »

B : « Les bonbons sont de même type »

C : « Il y a au moins un mentholé »

2) On tire maintenant un bonbon et on répète l'expérience 3 fois sans le remettre dans la bonbonnière. Calculer la probabilité des évènements suivants :

D : « N'obtenir aucun bonbon de chocolat »

E : « Obtenir exactement 2 mentholés »

F : « Obtenir au moins un caramel et un seul mentholé »

Exercice 5 : (4pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$A(1,0,2)$; $B(0,1,2)$ et $C(1,-2,0)$

1) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

b) Le point C appartient-il à (AB) ? Justifier.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par C et contenant (AB).

2) Soit le plan Q: $3x - 2y + z - 2 = 0$.

a) Donner un vecteur normal à Q.

b) Montrer P et Q sont perpendiculaires.

Bon Travail

Correction

Exercice 1: (4pts)

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x \sin(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \times \frac{x}{\sin(x)} = \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(2x)}{x} = 2$.
- 3) Le nombre des anagrammes du mot ESSENTIEL est $\frac{9!}{2! \times 3!}$.
- 4) Le nombre de tous les ensembles d'un ensemble fini de cardinal n est :
 $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n = 2^n$.
- 5) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. L'équation cartésienne du plan \mathcal{P} passant par O et de vecteur normal \vec{k} est $z = 0$. ($\vec{k} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$)
- 6) L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient
 $(\Delta): \begin{cases} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2\alpha \\ z = -\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$ et $(\Delta'): \begin{cases} x = 1 + \beta \\ y = 3 - \beta \\ z = \frac{1}{2}\beta \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$
 $\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ donc $(\Delta) // (\Delta')$ or le point $A(1,0,0) \in (\Delta)$ et $A \notin (\Delta')$.
Donc (Δ) et (Δ') sont strictement parallèles.

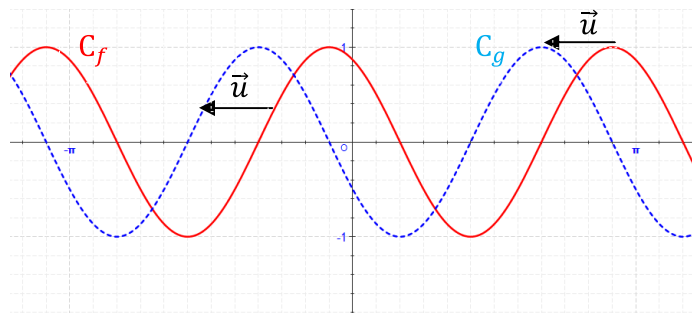
Exercice 2: (5pts)

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$$

- 1) a) f est périodique de période $\frac{2\pi}{2} = \pi$.
b) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 $\Leftrightarrow S_{[0, \pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.
- 2) a) f est dérivable sur \mathbb{R} et pour tout réel x , $f'(x) = 2 \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$.
 $f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{3} = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$.
 $\Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{2} + k\pi = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$.
 $\Leftrightarrow S_{[0, \pi]} = \left\{\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$.

b)

x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f(x)$	—	0	+	0
f	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$



3) : $g(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

a) $f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = g(x)$.
 [$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$]

b) la courbe de g est l'image de la courbe de f par la translation de vecteur $\vec{u} = -\frac{\pi}{2}\vec{i}$.

Exercice 3: (2pts)

1) On a :

$$\sum_{i=1}^6 p_i = 1 \Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \Rightarrow a + 3p_6 + a + a + a + p_6 = 1$$

$$\Rightarrow 4a + 4p_6 \quad (1)$$

$$p(A) = b \Rightarrow p_3 + p_6 = b \text{ or } p_3 = 3p_6 \Rightarrow 4p_6 = b \text{ donc } (1) \Rightarrow 4a + b = 1 \quad (2)$$

$$p(\overline{B}) = 1 - \frac{3}{4} \Rightarrow p_1 + p_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow 2a = \frac{3}{4} \Rightarrow a = \frac{1}{8} \text{ donc } (2) \Rightarrow b = 1 - 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où } a = \frac{1}{8}, b = \frac{1}{2} \text{ et } p_6 = \frac{1}{8}$$

2) $p_3 = 3p_6 = \frac{3}{8}$.

Exercice 4: (5pts)

1) Tirage simultané de 3 bonbons :

a) le nombre des tirages possibles est : $C_9^3 = \frac{9!}{6! \cdot 3!} = \frac{9 \times 8 \times 7}{3 \times 2} = 3 \times 4 \times 7 = 84$.

b) A : « Obtenir 3 caramels » $\text{card}(A) = C_3^3 = 1$ donc $p(A) = \frac{1}{84}$.

B : « Les bonbons sont de même type » $\text{card}(B) = C_3^3 + C_4^3 = 1 + 4 = 5$
 donc $p(B) = \frac{5}{84}$.

C : « Il y a au moins un mentholé » \overline{C} : « Aucun mentholé » $\text{card}(\overline{C}) = C_7^3 = 35$.

$$p(\overline{C}) = \frac{35}{84}. \text{ Donc } p(C) = 1 - \frac{35}{84} = \frac{49}{84}.$$

2) Tirage successive sans remise de 3 bonbons

D: « N'obtenir aucun bonbon de chocolat ».

Il ya 5 bonbons qui ne sont pas de chocolats donc $P(D) = \frac{5}{9} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}$.

E: « Obtenir exactement 2 mentholés »

C'est-à-dire obtenir 2 mentholés et 1 non mentholé.

$$\text{Donc } p(E) = \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{7}{7} \times C_3^2 = \frac{1}{12}$$

F: « Obtenir au moins un caramel et un seul mentholé »

C'est-à-dire 1 caramel, 1 mentholé et 1chc ou 2 caramels et 1 mentholé ou 3 caramels.

$$\begin{aligned} \text{Donc } p(F) &= \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{4}{7} \times 3! + \frac{2}{9} \times \frac{1}{8} \times \frac{2}{7} \times C_3^2 + \frac{3}{9} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{7} \\ &= \frac{144}{504} + \frac{12}{504} + \frac{6}{504} = \frac{162}{504} = \frac{9}{28}. \end{aligned}$$

Exercice 5: (5pts)

A(1,0,2) ; B(0,1,2) et C(1,-2,0)

1) a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, (AB) : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t \\ z = 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

b) Supposons que $C \in (AB)$ alors $\forall t \in \mathbb{R}, x_C = 1 - t = 1 \Rightarrow t=0 \Rightarrow y_C = 0$.

Absurde car $y_C = -2$. d'où C n'appartient pas à (AB).

c) Soit M(x, y, z) appartient au plan P signifie $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ y & 1 & -2 \\ z-2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2(x-1) - 2y + 2(z-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x + 2 - 2y + 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow -2x - 2y + 2z - 4 = 0 \Leftrightarrow x + y + z - 2 = 0.$$

Ainsi P : $x + y + z - 2 = 0$.

2) Q : $3x - 2y + z - 2 = 0$.

a) $\vec{n}_Q \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à Q.

b) $\vec{n}_P \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P.

$$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 3 - 2 - 1 = 0 \text{ implique } \vec{n}_P \perp \vec{n}_Q \text{ ou encore } P \perp Q.$$