Géométrie dans l'espace

1 L'espace E étant rapporté à un repère cartésien $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$$\vec{u}\begin{pmatrix}\sin\alpha\\ 1+\cos\alpha\\ \cos\frac{\alpha}{2}\end{pmatrix}\quad \vec{v}\begin{pmatrix}\sin\frac{\alpha}{2}\\ \cos\frac{\alpha}{2}\\ \frac{1}{2}\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad \vec{w}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$ avec $\alpha\in\,]0;\pi\,]$ et les points $A(1,-1,2)$ et $B(-2,\frac{1}{2},1)$

1/ On suppose que $\alpha\neq\pi$

a) Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires et déterminer une représentation paramétrique du plan $P(O,\vec{v},\vec{w})$ puis une équation cartésienne, de la droite $D(A,\vec{u})$ et de D' la perpendiculaire à P passant par B.

b) Étudier la position relative de D par rapport à P et D'

2/ Soient les points $C\left(\dfrac{1}{\sin\frac{\alpha}{2}}+1;\dfrac{3}{2}p-1;3\right)$ et $D\left(1-\dfrac{p^2}{\sin\frac{\alpha}{2}};-1-\dfrac{p}{2};\dfrac{3}{2}\right)$ où p est un réel.

a) Trouver une relation entre p et α pour que la relation $\vec{v}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DA}$ soit vérifiée.

b) Exprimer alors les coordonnées de C et D en fonction de α.

c) Soit $I=C*D$. Montrer que $\Delta(I,\overrightarrow{AI})\,//\,D$

3/ Dans la suite de l'exercice, on prendra $\alpha=\pi$

Soit le plan $P_m : (m^2-2)x-y-2mz+3m+5=0$ ($m\in IR$)

a) Pour quelles valeurs de m P_m contient-il le point C ?

b) Existe-t-il un plan P_m parallèle à (CD) ? perpendiculaire à (CD) ?

c) Déterminer les ensembles suivants :

$$E_1=\bigcap_{m\in IR}P_m \quad ; \quad E_2=P_0\cap P_4 \quad ; \quad E_3=\{M(x,y,z)\in \mathsf{E}\,;\,d(M,P_{-1})<2\}$$

d) Déterminer les coordonnées de A', B' et C' points d'intersection du plan P_1 avec les axes $(O;\vec{i})$, $(O;\vec{j})$ et $(O;\vec{k})$ puis montrer que C' appartient au plan médiateur de $[A'B']$.

---

2 Dans tout l'exercice, λ désigne un réel strictement positif.

Dans l'espace E, rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère le point $A(\lambda,0,0)$; et le point C tel que les angles $\widehat{CAO}$, $\widehat{AOC}$ et $\widehat{OCA}$ du triangle AOC soient proportionnels à 2, 4 et 6.

1/ a) Montrer que C appartient à la sphère S de diamètre [OA].

b) Montrer que C appartient à la sphère S' de centre A et de rayon $\frac{\lambda\sqrt{3}}{2}$

c) En déduire que C varie sur un cercle dont on déterminera le rayon et l'axe.

2/ Soit $E=\left\{M(x,y,z)\in \mathsf{E}\,;\ \begin{cases}x=\lambda\cos\alpha.\cos\beta\\ y=\lambda\cos\alpha.\sin\beta\\ z=\lambda\sin\alpha\end{cases} ;(\alpha,\beta)\in IR^2\right\}$

a) Montrer que E est une sphère et étudier sa position par rapport à S et S'.

b) Déduire qu'il existe un plan tangent à la fois à S et à E en un point que l'on déterminera.

3/ On considère les sphères $S_n(I_n,R_n)$ avec $I_n(0;3(R_n-1);0)$ et $n\in IN$

a) Démontrer que si S_n est tangente à S_{n+1} alors $(R_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique.

b) Existe-t-il un plan P_n tangent à toutes les sphère S_n. Si oui en déterminer une équation cartésienne.

La recette de ces exercices délicieux a été proposée par Walid Ben Romdhane. Si, après de longs efforts, vous n'arrivez pas à déguster quelques questions, contactez moi pour avoir la correction : walid_brd@voila.fr