Exercice N°1 (DS2 96/97)

Soit f_m la fonction définie sur IR par $f_m(x) = -x^3 + \frac{3}{2}mx^2 + m^2$ où m est un paramètre réel. On désigne par (C_m) sa courbe dans un repère orthonormé $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Dans cette question on prend $m = 1$

a/ Étudier les variation de f_1 et construire (C_1).

b/ Déterminer graphiquement, selon les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $x^3 - \frac{3}{2}x^2 + k - 1 = 0$

c/ Soit g la fonction définie sur IR par : $g(x) = -\left|x^3\right| + \frac{3}{2}x^2 + 1$

Expliquer comment obtenir (C'), la courbe de g dans le repère $\Re$, à partir de (C_1).

2) Étudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m . (On distinguera 3 cas)

3) Déterminer suivant les valeurs de m les coordonnées des points de (C_m) où la tangente est parallèle à $(O, \vec{i})$ puis trouver une équation cartésienne de l'ensemble décrit par chacun des points trouvés lorsque m décrit IR .

4) Montrer que (C_m) admet un point d'inflexion I_m que l'on déterminera ; vérifier que ce point est un centre de symétrie pour (C_m). Quel est l'ensemble des point I_m lorsque m varie dans IR .

Exercice N°2 (DS2 97/98)

I) Soit f la fonction définie par $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.
2) Montrer que (C) admet un point d'inflexion I que l'on précisera.
3) Montrer que I est un centre de symétrie de (C).
4) Construire (C) ainsi que Δ la tangente à (C) en I.
5) Déterminer graphiquement suivant les valeurs du réel k le nombre de solutions de l'équation $-2x^3 + 6x^2 - 2 + k = 0$
6) Déduire de (C) la courbe (C') de la fonction g définie par $g(x) = -\left|x^3\right| + 3x^2 - 1$

II) Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = -\frac{x^3}{m^2} + \frac{3x^2}{m} - m$ où $m \in IR^*$ et (C_m) la courbe de f_m dans le même repère.

1) Déterminer suivant les valeurs de m le tableau de variations de f_m .
2) Déterminer les coordonnées des points A_m et B_m de (C_m) correspondant aux extrema de f_m
3) Déterminer l'ensemble décrit par chacun des point A_m et B_m lorsque m décrit IR^*.
4) a/ Montrer que pour tout $x \in IR$ et pour tout $m \in IR^*$ $f_m(mx) = m f(x)$

   b/ En déduire que (C_m) est l'image de (C) (courbe de f dan I) par une homothétie que l'on précisera.

   c/ Construire (C_2)

Exercice N°3 :

On considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x) = \frac{1}{4}x^4 - mx^3 - \frac{1}{2}x^2 + 3mx - 2m$ où m est un paramètre réel ; on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Dans cette question, on prend $m = 0$, étudier les variations de f_0 et construire (C_0)
2) Démontrer que, lorsque m varie, toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes dont on déterminera les coordonnées.
3) Montrer que pour tout $m \in IR$, (C_m) admet deux points d'inflexion.
4) Déterminer suivant les valeurs de m le nombre d'extrema de f_m ; préciser les cas où f_m admet un seul extremum et donner dans chacun de ces cas le tableau de variations correspondant.
5) Construire la courbe $(C_{\frac{1}{3}})$.

Exercice N°4 :

On considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x) = x^3 - 3mx + 2$ où m est un paramètre réel, et on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Pour quelles valeurs de m la courbe (C_m) admet-elle des tangentes parallèles à l'axe des abscisses ? Trouver en fonction de m les coordonnées des points de contact.
2) Déterminer m pour que la courbe (C_m) soit tangente à la droite $(O, \vec{i})$. Construire la courbe (C_m) correspondante.
3) Discuter suivant les valeurs de m le nombre de racines de l'équation : $x^3 - 3mx + 2 = 0$

Exercice N°5 :

On considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x) = (2m+1)x^3 - mx - m - 1$ où m est un paramètre réel et on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Étudier suivant les valeurs de m le sens de variation de f_m.
2) Démontrer que quel que soit m, (C_m) passe par un point fixe A que l'on déterminera.
3) Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I_m de (C_m). Écrire une équation de la tangente en I_m à (C_m). Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.
4) Pour une valeur x_0 de l'abscisse, les tangentes aux courbes (C_m) sont parallèles entre elles lorsque m varie. Déterminer les valeurs possibles de x_0
5) Deux courbes (C_m) et $(C_{m'})$ distinctes ont-elles des points communs autres que A ?
6) Construire sur une même figure les courbes (C_{-1}) ; $(C_{-\frac{1}{2}})$; (C_1)

Exercice N°6 :

On considère la fonction f_m définie sir IR par $f_m(x) = x^3 - 3mx^2 + 3(m-1) + 4$ où m est un paramètre réel ; on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re = (O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Démontrer que quel que soit m, (C_m) passe par deux points fixes A et B (B est tel que $x_B > 0$)
2) Déterminer m pour que A corresponde à un extremum
3) pou $m = 1$ on pose $f(x) = f_1(x)$ et $(C_f) = (C_1)$. Étudier f et construire (C_f)
4) Soit C le point de (C_f) d'abscisse -1. Δ_α la droite passant par C et de coefficient directeur α. Étudier, suivant les valeurs de α, $\Delta_\alpha \cap (C_f)$
5) Dans le cas où $\Delta_\alpha \cap (C_f) = \{C, M', M''\}$ on pose $I = M' * M''$. Déterminer l'ensemble des points I.
6) Soit $g(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère $\Re$. Vérifier que $g(x) = -f(-x)$ et montrer que $(C_g) = S_O((C_f))$. Construire (C_g)

Exercice N°7 :

On considère la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x) = mx^3 - 2x^2 + (4 - 3m)x + 2m$ où m est un paramètre réel ; on désigne par (C_m) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) Montrer que les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B tels que $x_A < x_B$.
2) $(C_m)_{m\in IR}$ peuvent-elles être tangentes ? Définir l'équation de leur tangente.
3) Étudier suivant les valeurs de m les variations de f_m et indiquer le nombre d'extrema.
4) Préciser la valeur de m pour laquelle f_m garde le même sens de variation et étudier la position de la courbe correspondante par rapport à sa tangente au point d'inflexion.
5) Montrer qu'il existe deux valeurs de x_0 pour lesquelles (C_m) possèdent des tangentes ayant la même direction ; définir cette direction pour chaque x_0
6) On considère la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{ax^2 + bx + c}{x+1}$
   a/ Déterminer a, b et c pour que g possède un extremum égal à 2 en $x_0 = 1$ et que (C_g) passe par E (0 , 1)
   b/ Pour $a = -1$, $b = 4$ et $c = 1$ étudier les variation de g et montrer que (C_g) est tangente à toutes les courbes (C_m) en un point dont on précisera les coordonnées.
7) Pour quelle valeur de m (C_m) passe par le centre de symétrie Ω de (C_g) ?