EXERCICE N°1

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3+3x-4$.

1- a) Etudier les variations de la fonction f.

b) Montrer que la courbe représentative Cf de f admet un point d'inflexion I dont on déterminera les coordonnées.

c) Tracer la tangente à Cf au point I.

d) Tracer C.

2- En déduire la courbe représentative de la fonction $| f |$

EXERCICE N°2

Eudier les variations des fonctions suivantes ; puis étudier l'existance d'extrémum

1- $f(x) = x^3 -6x^3 +9x +1$

2- $f(x) = x^3 -2x^3 +5x$

3- $f(x) = -2x^3 -2$

EXERCICE N°3

Soit la fonction f définie par : $f(x)=x^3 +(m-1)x^2 +3x+1$ (m est un réel)

Déterminer m pour que f admette deux extréma.

EXERCICE N°4

Soit $f(x)= x^3 +ax^2 +bx+c$

Déterminer les réels a ,b,c pour que f admette un extrémum pour x=1 et pour que la droite d'équation y=7x+11 soit tangente à **Cf** au point d'abcisse 2.

EXERCICE N°5

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x + 2$

1- Etudier f et tracer Cf .

2- a) Montrer que le point I(0,2) est un centre de symétrie de C .

b) Tracer la tangente à C au point I .

3- Soit la fonction g définie sur IR par $g(x) = | f (x) -2 |$

Montrer que la fonction g est paire puis tracer sa courbe Cg dans le même repère.

EXERCICE N°6

Doit la fonction f_m définie sur IR par : $f_m(x)=-x^3+(m-1)x^2+3mx-7$, avec m un réel .

On désigne par C_m la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé .

1- Montrer que toutes les courbes C_m passent par deux points fixes.

2- a) Déterminer m pour que la courbe C_m passe par le point I(1;-5)

b) Tracer la courbe correspondante .

EXERCICE N°7

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$ et on désigne par **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1- a) Soit a un réel ; exprimer f(x)-f(a) en fonction de (x-a).

b) Calculer f(-1) et en déduire que pour tout réel x , il existe deux réels a et b tels que : $f(x)=(x+1)(x^2+ax+b)$

c) Déduire alors les solutions de l'équation f(x) = 0 puis de l'inéquation f(x)<0.

2- a) Montrer que **C** admet un point d'inflexion A .

b) Déterminer l'équation de la tangente **D** à **C** au point A.

c) Trcer **C** et **D**.

3- On appelle g la fonction définie par g(x)=|f(x)|

a) Déterminer les domaines de contnuité et de dérivabilité de g .

b) Tracer Cg

4- Soit h la fonction définie sur IR par h(x)=f(|x|). Tracer Ch

EXERCICE N°8

Soit la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x)=x^3+(m-1)x^2+2$ et on désigne par C_m sa courbe représentative dans un un repère orthonormé.

1- a) Etudier les variations de f_0 et montrer que $\mathbf{C_0}$ est symétrique par rapport à un point A que l'on précisera .

b) Soit **D** la tangente à $\mathbf{C_0}$ au point A . Etudier les positions relatives de $\mathbf{C_0}$ et **D**

Tracer $\mathbf{C_0}$ et **D**

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f_0(x) = a$ lorsque a varie .

2- a) Montrer que toutes les droites C_m passent par un point fixe que l'on déterminera.

b) Soient deux réels m et n distincts , montrer que C_m et C_n se coupent en un point unique que l'on précisera.

c) Etudier les variations de f_m .

d) Montrer que pour tout réel m , C_m admet un point d'inflexion I_m .

e) Quel est l'ensemble des points I_m quand m varie ?Le représenter dans le même repère .

EXERCICE N°9

On considère la fonction f définie sur IR par $f(x) = x^3 - x + 1$

1- a) Déterminer les variations de f .

b) Déterminer une équation de la tangente **D** à Cf au point I d'abscisse nulle et déduire la position de Cf par rapport à **D** .

2- Montrer que Cf admet I comme centre de symétrie .

3- On appelle g la fonction définie par $g(x) = ax^2 + bx + c$. Déterminer a,b et c pour que Cg ait pour sommet le point d'ordonnée le maximum relatif de f et passe par le point d'ordonnée le minimum relatif de f .

4- Représenter Cf et Cg relativement à un même repère .

5- On appelle D_m la droite d'équation $y = mx$.

a) Montrer que D_m coupe Cg en deux points A et B distincts .

b) Soit M(x,y) le milieu du segment [AB] . Déterminer l'ensemble des points M quand m varie

EXERCICE N°10

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= \frac{1}{4} x^4 - 2x^2 + 3$.

1- Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative Cf dans un repère orthonormé.

2- En déduire la représentation graphique de la fonction f.

EXERCICE N°11

Soit la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x) = (m-1)x^4-3mx^3 + (3m+2)x^2 - mx -1$

On appelle C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

1- a) Etudier les variations de f_0 et f_1.

b) Etudier la position de C_0 par rapport à C_1.

c) Tracer C_0 et C_1.

d) Déterminer le nombre de points d'intersection de C_0 avec chacun des axes.

2- Montrer que toutes les courbes C_m passent par deux points fixes .

3- Montrer que toutes les courbes C_m sont tangentes en l'un des points fixes.

EXERCICE N°12

Soit la fonction f_m définie sur IR par $f_m(x)=mx^4 -(m-1)x^2 +2$ où m est un réel .

1- Montrer que toutes les courbes C_m de f_m passent par des point fixes que l'on déterminera .

2- Etudier suivant les valeurs de m le sens de variation de la fonction f_m .

3- Tracer C_{-1} , $C_{1/2}$ et C_2.

EXERCICE N°13

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)= \frac{1}{4} x^4 + 1/2\, x^2 - 2$

1- Etudier la parité de f et dresser son tableau de variation sur IR_+

2- On désigne par **C** sa courbe représentative dans un repère orthonormé .

Montrer que **C** coupe l'axe des abscisses en deux points distincts que l'on déterminera .

3- Tracer **C** et déterminer graphiquement le nombre de solutions dans IR de l'équation : f(x) = 0

EXERCICE N°14

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=-x^3+x$

1- Etudier f et construire sa courbe **C** dans un repère orthonormé.

2- Donner une équation de la tangente **D** à **C** au point I d'abscisse 0.

3- Etudier les positions relatives de C et D .Construire D

4- Montrer que I est un point d'inflexion de C

5- I est-il un centre de symétrie de C ? Pourquoi ?

EXERCICE N°15

Soit la fonction f définie sur IR par $f(x)=x^3-3x+2$

1- Etudier f et tracer Cf .

2- a) Montrer que le point I(0,2) est un centre de symétrie de C .

b) Tracer la tangente à C au point I .

3- Soit la fonction g définie sur IR par $g(x)= |x^3|-3|x|+2$

Montrer que la fonction g est paire puis tracer sa courbe Cg dans le même repère.

EXERCICE N°16

1- Etudier la fonction f définie sur IR par $f(x)=-x^3+3x+4$ et tracer sa courbe représentative (C) .

2- Pour tout réel m on désigne par (C_m) la courbe d'équation :$y=mx^2-(m-6)x+4$

Démontrer que toutes les courbes (C_m) passent par deux points fixes A et B dont on déterminera les coordonnées.

3- Discuter , suivant les valeurs de m , le nombre de points communs à (C) et à (C_m).

4- S'il existe un point M commun à (C) et (C_m) , tel que les tangentes à (C) et à (C_m) soient confondues. On dit C et (C_m) sont tangentes au point M . M est appelé le point de contact.

5- Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les courbes (C) et (C_m) sont tangentes.

Déterminer les coordonnées des points de contact et les équations aux courbes en ces points.

EXERCICE N°17

Soit la fonction f_m définie par $f_m(x)=(2m+1)x^3-mx-m+1$; On appelle C_m sa courbe

1- Etudier le sens de variation de f_m suivants les valeurs de m.

2- Démontrer que toutes les courbes C_m passent par un point fixe A

3- Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I_m de C_m . Ecrire l'équation de la tangente en I_m à C_m . Démontrer que cette droite passe par un point fixe lorsque m varie.

4- Pour une valeur x_0 de l'abscisse les tangentes aux courbes C_m sont parallèles entre elles lorque m varie. Déterminer les valeurs possibles de x_0.

5- Deux courbes C_m distinctes ont-elles des points communs autres que A.

6- Construire C_1 et $C_{-1/2}$.

7- Discuter suivant les valeurs du paramétre réel t, en utilisant C_1 le nombre de solutions de l'équation : $6x^3-2x-2t+2=0$

8- Résoudre graphiquement le système $\begin{cases} 3x^3-x-y\geq 0 \\ 2y-x-3<0 \end{cases}$.

PROBLEMES D'OPTIMISATION

EXERCICE N°1

Un rectangle de dimensions x et y a pour périmètre 60 cm.

1- Calculer ,en fonction de x l'aire A(x) du rectangle.

2- Déterminer x et y pour que l'aire du rectangle soit maximale.

EXERCICE N°2

Un rectangle de dimensions x et y a pour aire 121 cm^2 .

1- Calculer son périmétre p(x) en fonction de x

2- Déterminer x et y pour que p(x) soit minimum.

EXERCICE N°3

Soit un triangle équilatéral ABC de côté a .M étant un point de [BC] distinct de B et C ,on désigne par H et K les projetés orthogonaux de M respectivement sur (AB) et (AC).On pose BM =x

1- Calculer ,en fonction de x ,l'aire A(x) du quadrilatére AHMK.

2- Déterminer x poir que A(x) soit maximale.

EXERCICE N°4

ABC est un triangle isocéle de sommet A inscrit dans un cercle de centre O et de rayon 1 .La droite (AO) coupe (BC) en H .A est fixe et B et C sont variables.

1- Calculer en fonction de x l'aire A(x) du triangle ABC

2- Etudier les variations de f:(x) = $A(x)^2$

3- Déterminer x pour que l'aire A(x) soit maximale.

Montrer que ,dans ce cas , le triangle ABC est équilatéral.