Exercice N°1 :

Soit f_α la fonction définie par $f_\alpha(x) = \dfrac{x^2+(\alpha-1)x+2\alpha}{x-1}$ où α est un paramètre réel strictement positif; on désigne par (C_α) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re = (O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Montrer que toutes les courbes (C_α) passent par un point fixe I.

2) Étudier les variations de f_α.

3) Montrer que (C_α) admet la droite $\Delta_\alpha : y = x+\alpha$ comme asymptote oblique. Etudier la position relative de (C_α) par rapport à Δ_α

4) Étudier la position relative de (C_2) et de (C_4) et construire (C_2) et (C_4) dans le même repère.

5) On note A_α et B_α les points de (C_α) correspondants respectivement au maximum et au minimum relatifs de f_α. Déterminer l'ensemble E des points A_α et B_α lorsque α décrit IR^*_+.

Exercice N°2 :

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = \dfrac{x^2+5x+m}{x}$ où m est un paramètre réel non nul et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\Re = (O; \vec{i}; \vec{j})$

I) 1/ Déterminer m pour que f_m soit monotone sur chacun des intervalles ou elle est définie.

2/ Déterminer m pour que f_m admette un maximum et un minimum. Calculer en fonction de m les coordonnées des points correspondants de C_m et déterminer l'ensemble de ces points lorsque m varie.

3/ Soit A_m le point de C_m où C_m rencontre la droite d'équation : $x = 4$ et soit T_m la tangente en A_m à C_m. Former l'équation de T_m et montrer que T_m coupe la droite d'équation $y = x + 5$ on un point B indépendant de m.

II) Dans toute la suite on prend m = 4 et on pose $f = f_4$ et $C = C_4$.

1/ Étudier les variations de f et tracer, dans le repère $\Re$, C ainsi que les tangentes à C en ses points d'intersection avec l'axe des abscisses.

2/ Soit la fonction g définie par $g(x) = |f(x)|$. Tracer , dans le même repère $\Re$, et avec une deuxième couleur, la courbe représentative Γ_1 de g. Dresser alors le tableau complet de variations de g.

3/ Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $|x^2+5x+4| - k|x| = 0$

4/ Soit la fonction h définie par $h(x) = |x+5| + \dfrac{4}{x}$. Étudier h et tracer, dans le même repère $\Re$ et avec une troisième couleur, sa courbe représentative Γ_2.

Exercice N°3 :

1) On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2-3x+3}{x-1}$ et on désigne par (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $\Re = (O; \vec{i}; \vec{j})$

a) Étudier f et tracer (C).

b) Montrer que (C) admet un centre de symétrie Ω que l'on précisera.

c) Soit le vecteur $\vec{I} = \vec{i} - \vec{j}$ et le repère $\Re' = (\Omega; \vec{I}; \vec{j})$.

Déterminer une équation cartésienne de (C) dans le repère $\Re'$ et en déduire la nature de (C).

2) Soit g la fonction définie par $g(x) = -x-4+\dfrac{1}{|x-1|}$

Étudier les variations de g et tracer sa courbe (C_g) dans le repère $\Re$.

3) Déterminer graphiquement suivant les valeurs du paramètre réel k le nombre de solutions de l'équation $|x-1|.(x+6-k)=1$

Exercice N° 4 :

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x}{x - 2}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Montrer qu'il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in D_f$ on a $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-2}$

2) Etudier f et construire (C).
3) Montrer que (C) admet un centre de symétrie I que l'on précisera.
4) Déterminer graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solutions de l'équation $2x^2 - (m + 3)x + 2m = 0$.

Exercice N° 5 :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{-x^2 + x + 1}{x + 1}$ et (C) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer qu'il existe trois réel a ,b et c tels que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1}$
2) Étudier f et construire (C).
3) Montrer que (C) admet un centre de symétrie I que l'on précisera.
4) Soient les fondions g et h définies par $g(x) = \left|\dfrac{x^2 - x - 1}{-x - 1}\right|$ et $h(x) = \dfrac{-x^2 + |x| + 1}{|x| + 1}$. Expliquer comment obtenir à partir de (C) les courbes (C_1) et (C_2) des fonctions g et h. Les construire avec deux autres couleurs.

Exercice N° 6 :

On considère la fonction f_m définie par $f_m(x) = \dfrac{x^2 - 2mx + 1}{mx - 1}$ où m est un paramètre réel et C_m sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) Construire C_{-1}, C_0 et C_1 dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

<u>Dans toute la suite on suppose que $m \in IR \setminus \{-1 , 0 , 1\}$ et on admet que C_m est alors une hyperbole.</u>

2) Démontrer que toutes les courbes C_m passent par trois points fixes A ,B et C dont on précisera les coordonnées.
3) Déterminer les équations des asymptotes de C_m et en déduire les coordonnées du centre de symétrie Ω_m de C_m
4) Déterminer l'ensemble des points Ω_m lorsque m décrit $IR \setminus \{-1 , 0 , 1\}$.
5) Vérifier qu'aux points d'abscisses 0 et $\dfrac{2}{m}$ la courbe C_m admet deux tangentes parallèles D_m et D'_m.
   Écrire les équations de D_m et D'_m.
6) Déterminer, suivant les valeurs de m, le nombre de points où C_m admet une tangente perpendiculaire à D_m.
7) Construire C_2 dans le même repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$

Exercice N° 7 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\mathfrak{R} = (O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Étudier les variations de la fonction f_1 définie par $f_1(x) = \dfrac{3 - x}{x}$ et construire sa courbe (C_1) dans $\mathfrak{R}$.
2) Soient A et B les points de (C_1) d'abscisses respectives 1 et 3 ; déterminer l'équation de la droite (AB) et trouver les équations des tangentes à (C_1) parallèles à (AB).
3) Une parallèle à l'axe $(O, \vec{j})$ coupe (C_1) en M et la droite (AB)en N soit P le milieu du segment [MN].
   Montrer qu'il existe entre les coordonnées de P une relation qui peut s'écrire $y = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$
4) Étudier les variations de la fonction f_2 définie par $f_2(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2x}$ et construire sa courbe (C_2) dans le même repère $\mathfrak{R}$.
5) Trouver les coordonnées du point P de (C2) distinct de A tel que le triangle AMN correspondant soit isocèle en A.