Exercice N°1 :

1) Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2+4x+4}{2x}$. Étudier les variations de f et construire sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.
2) Soit un rectangle IABC tel que IA = 2 et IC = 1.
Pour tout M de la demi-droite d'origine A portée par (IA) et ne contenant pas I, on considère le point N, point d'intersection de (MB) avec (IC). On s'intéresse à l'aire S du triangle IMN. On pose AM = x et g la fonction qui à x fait correspondre S.
a/ Quel est l'ensemble de définition E de g ? Montrer que $\forall x \in E$, $g(x) = f(x)$
b/ Où faut-il placer M pour que S soit minimale ? pour que S = 8 ?
3) Soit k la fonction qui, à tout x de E, fait correspondre l'aire du trapèze CBMI.
a/ Calculer k (x) puis étudier la limite lorsque x tend vers $+\infty$ de $g(x) - k(x)$
b/ Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

Exercice N°2 :

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{x-2m}{mx-2}$ où $m \in IR^*$ et H_m la courbe de f_m dans un R.O.N $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) a/ Montrer que les courbes H_m passent par deux points fixes A et B
   b/ Trouver les coefficients directeurs des tangentes à H_m en A et B.
   Montrer que leur produit ne dépend pas de m.
2) Étudier selon la paramètre m les variations de f_m
3) a/ Montrer que $S_O(H_m) = H_{-m}$ où S_O est la symétrie de centre O.
   b/ Construire sur le même repère H_2 et H_{-2} .
   c/ Soit $M_0(x_0 ; y_0)$ et $E = \{ M_0 \in P \,/\, y_0(2x_0-2)-(x_0-4) > 0 \}$.
   Trouver E et le colorier (On utilise un schéma à part)
4) Soit $\Omega\left(\dfrac{2}{m};\dfrac{1}{m}\right)$.
   a/ Montrer que Ω est un centre de symétrie pour H_m.
   b/ Quel est l'ensemble F des points Ω lorsque m varie ?
5) Soit D_p la droite d'équation $y = px$, $p \in IR$.
   a/ Pour quelles valeurs de p, D_p coupe-t-elle H_2 en deux points M' et M'' distincts ou confondus.
   b/ Soit I le point du plan d'abscisse x tel que $I \in D_p$ et $\dfrac{x}{4} = \dfrac{1}{x'} + \dfrac{1}{x''}$ (x' : abscisse de M' ; x'' : abscisse de M'')
   Trouver, en fonction de p, les coordonnées de I. Quel est l'ensemble des points I lorsque p varie ? Le tracer

Exercice N°3 :

Soit la fonction f_m définie par $f_a(x) = \dfrac{2x(1-ax)}{1-x^2}$ $(a \in IR)$

1) Déterminer a pour que f_a soit monotone sur son domaine.
2) Déterminer a pour que f_a admette un maximum et un minimum. Soient M_1 et M_2 les points correspondant au minimum et au maximum respectivement. Calculer leurs abscisses x_1 et x_2 en fonction de a.
3) Pour a > 1 , on pose $a = \dfrac{1}{\sin\theta}$ avec $\theta \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. Montrer que $\{x_1 , x_2\} = \left\{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2} , \operatorname{cotg}\dfrac{\theta}{2}\right\}$.

Exercice N°4:

On considère la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2-5x+5}{x-1}$.

1) Trouver les trois réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x-1}$

2) Étudier les variations de f et tracer sa courbe $\mathscr{C}_f$ dans un plan rapporté à un R.O.N $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

3) Soit Δ_m une droite passant par I (1 , –3) et de coefficient directeur $m \in$ IR

a/ Donner une équation de Δ_m.

b/ Trouver graphiquement, suivant les valeurs de m, le nombre de solutions de chacune des équations suivantes

(1) : $f(x) = mx - (3+m)$ (2) : $f(|t|) = m|t| - (3+m)$

4) Soit g la fonction définie par : $g(x) = \dfrac{\left|x^2-5x+5\right|}{x-1}$. Déduire la courbe de g à partir de $\mathscr{C}_f$.

Exercice N°5:

Soit f_m la fonction définie par $f_m(x) = \dfrac{-x^2+2x+m}{x-1}$; $(m \neq -1)$ et $\mathscr{C}_m$ sa courbe dans un R.O.N $\mathfrak{R} = \left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Montrer que $\mathscr{C}_m$ admet deux asymptotes que l'on précisera.

2) Tracer $\mathscr{C}_0$ et $\mathscr{C}_{-2}$ dans $\mathfrak{R}$. Soit A le point de $\mathscr{C}_0$ d'abscisse 0 et M le point de $\mathscr{C}_{-2}$ d'abscisse x.

Déterminer x pour que l'aire de OAM soit minimale.

3) Soit Ω (1 , 0) et D la droite d'équation $y = kx - k$ (k $\in$ IR)

a/ Discuter suivant k, le nombre de points d'intersection de D avec $\mathscr{C}_{-2}$.

b/ Lorsque D rencontre $\mathscr{C}_{-2}$ en M' et M'', montrer que $\Omega = M' * M''$

Exercice N°6:

(I) Soient f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un R.O.N $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

1) Étudier les variations de f

2) Démontrer que I (1 , 1) est un centre de symétrie de $\mathscr{C}$. Tracer $\mathscr{C}$ (unité : 2 cm)

(II) Soient p un paramètre réel et D_p la droite d'équation $y = -3x + p$

1) Démontrer que les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec D_p sont racines de l'équation :

$4x^2 - (4+p)x + 1 + p = 0$. Discuter suivant les valeurs de p le nombre de ces points.

2) a/ On suppose que p = 0. Déterminer les coordonnées du point A, point d'intersection de $\mathscr{C}$ avec D_0. Tracer D_0. Que peut-on dire de D_0 et de $\mathscr{C}$.

b/ Faire un travail analogue pour p = 8. On appellera A' le point d'intersection de $\mathscr{C}$ et de D_8

3) On se place dans le cas où D_p coupe $\mathscr{C}$ en deux points M' et M''.

a/ Déterminer les coordonnées de $K = M' * M''$.

b/ Démontrer que $K \in (AA')$.

c/ Montrer que l'ensemble des points K lorsque P varie est la réunion de deux demi-droites à déterminer.

(III) Soient m un réel strictement positif et D_m la droite passant par I et de coefficient directeur m.

1) Vérifier que le point $P\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{m-1}};1+\dfrac{m}{\sqrt{m-1}}\right)$ est un point de $\mathscr{C} \cap D_m$

2) a/ Quelles sont les coordonnées de Q , le deuxième point de $\mathscr{C} \cap D_m$?

b/ Montrer que les tangentes en P et Q à $\mathscr{C}$ sont parallèles.