Variations – Extrema

1 Soit un triangle ABC rectangle en B avec BC = 2 et AB = x. On désigne par G le milieu de $[BC]$ et par θ une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{AG}\,;\overrightarrow{AC}\right)$

1/ Déterminer analytiquement $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{tg}\theta$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{tg}\theta$.

2/ Pour quelle valeur de x l'angle θ est-il maximum ?

3/ Donner pour la valeur de x trouvée une approximation de θ à 10^{-2} près par défaut.

2 **A/ Démonstration de formule :**

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle D et telle que, pour tout $x \in D$, $f(x) > 0$; et soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

1/ En utilisant la fonction g, montrer que $\left(\sqrt{f}\right)' = \dfrac{f'}{2\sqrt{f}}$

2/ Vérifier cette formule en calculant

$$\lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{f(x+h)} - \sqrt{f(x)}}{h}$$

B/ Applications :

1/ Déterminer le domaine de définition de la fonction $x \mapsto \sqrt{\dfrac{1-x}{x+1}}$ puis dresser son tableau de variations.

2/ Déterminer la fonction k telle que $k(0) = 2$ et dont la dérivée est $k' : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$. Dresser le tableau de variations de k.

3/ Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et telle que $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f'(x) = \dfrac{x+2}{f(x)+1} \; ; \forall x \in I \end{cases}$

a) Déterminer I puis exprimer $f(x)$ en fonction de x.

b) En utilisant la formule démontrée en **A/** vérifier que f ' satisfait bien la propriété $f'(x) = \dfrac{x+2}{f(x)+1}$

3 Soit f la fonction définie par $f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$

1/ A l'aide du tableau de variations de f , montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution qu'on appellera α.

2/ Calculer α sachant que $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(\alpha+h)}{h} = \dfrac{\alpha^3 - 1}{\alpha - 1}$

3/ Soit $f_m(x) = x^3 - mx^2 - m^2x + 5$

En utilisant le tableau de variations de f_m , discuter selon les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f_m(x) = 0$. (On pourra utiliser le fait que l'expression $5 - m^3$ s'annule pour une seule valeur de m appelée « racine cubique de 5 » et notée $\sqrt[3]{5}$)

4 Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle D de IR et vérifiant

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ x^2 f'(x) + 2x.f(x) = 1 ; \forall x \in D \end{cases}$$

On donne le tableau de variations incomplet de f :

x	$-\infty$	α	λ	$+\infty$
$f'(x)$		‖	0	
$f(x)$		‖	$f(\lambda)$	

1/ Déterminer α et en déduire D.

2/ Sans calculer $f'(x)$ en fonction de x, déterminer λ.

3/ Compléter le tableau de variations de f.

5 Soit $F_m(x) = \frac{1}{3}x^3 - mx^2 + (2m-1)x + \frac{2}{3}$

On note par $f_m(x)$ la dérivée première de $F_m(x)$.

1/ Étudier suivant les valeurs de m le sens de variation de la fonction F_m.

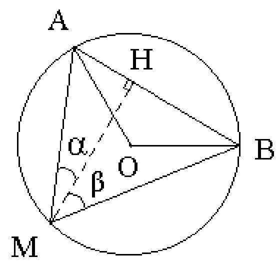
2/ On prend m = 4 et on se propose d'étudier les variations de la fonction $x \mapsto f_4(x^2)$.

a) Calculer $f_4'(x^2)$ et $\left[f_4(x^2)\right]'$.

Quelle relation existe-t-il entre ces deux fonctions ?

b) Déduire de cette relation le signe de le tableau de variations de $f_4(x^2)$

6 $\mathscr{C}$ est un cercle de centre O et de rayon r = 1, A et B deux points fixes de $\mathscr{C}$ tels que $AB = \sqrt{3}$. M est un point qui varie sur $\mathscr{C}$ en restant dans le demi-plan de frontière (AB) et contenant O et en gardant son projeté orthogonal H sur le segment [AB].



1/ Déterminer la nature du triangle AMB lorsque son aire $\mathcal{A}$ est maximale

Indication : Exprimer $\mathcal{A}$ en fonction de α, puis chercher la valeur de α pour laquelle $\mathcal{A}$ est maximale.

La recette de ces exercices délicieux a été proposée par Walid Ben Romdhane. Si, après de longs efforts, vous n'arrivez pas à déguster quelques questions, contactez moi pour avoir la correction : walid_brd@voila.fr