Trigonométrie

Exercice N°1

Pour $x \in IR$,calculer les expressions suivante en fonction de cosx et sinx

1- $\sin(5\pi - x)+\cos(\frac{5\pi}{2}+x)+\sin(\frac{5\pi}{2}-x)$

2- $\sin(x+\frac{3\pi}{2})+\sin(3\pi - x)+\cos(3\pi - x)+\cos(x+\frac{3\pi}{2})$

Exercice N°2

1- Calculer cosx et sinx sachant que tgx=2 et $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

2- Calculer cosx et tgx sachant que sinx= $\frac{-1}{4}$ et $\pi \leq x \leq \frac{3\pi}{2}$

Exercice N°3

Démontrer les résultats suivantes

1- $(\sin x+\cos x)^2=1+2\cos x\sin x$
2- $(\sin x-\cos x)^2=1-2\cos x\sin x$
3- $\cos^4 x+\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x=1$
4- $\cos^2 x-\cos^2 y=\sin^2 y-\sin^2 x=\frac{1}{1+tg^2 x}-\frac{1}{1+tg^2 y}$
5- (tgxtgy)(cotgx+cotgy)=tgx+tgy

Exercice N°4

1- a- Montrer que pour tous x et y réels on a : $\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y$

b- En déduire que pour tout x réel on a : $\cos x+\cos(x+\frac{2\pi}{3})+\cos(x-\frac{2\pi}{3})=0$

2- Montrer que pour tout x réel on a :

a- $2(1-\cos 2x)-\sin^2 2x=4\sin^4 x$

b- $2\sin(\frac{\pi}{4}-x)\cos(\frac{\pi}{4}-x)=\cos 2x$

3- Montrer que pour tout $x \in IR-\{k\frac{\pi}{2}, k \in Z\}$,on a : $tgx+\frac{1}{tgx}=\frac{2}{\sin 2x}$

Exercice N°5

Simplifier les expressions suivantes

1- $(\cos x+\sin x)^2+(\cos x-\sin x)^2-2$
2- $\cos^4 x-\sin^4 x$
3- $\frac{\cos^2 x-\sin^2 y}{\sin^2 x\sin^2 y}$ - $cotg^2 x\, cotg^2 y$
4- $\cos^6 x+\sin^6 x$
5- $\frac{\sin 2x}{\sin x}-\frac{\cos 2x}{\cos x}$

Exercice N°6

1- Montrer que $\cos^4 x=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{1}{8}\cos 4x$

2- Montrer que $\cos^4\frac{\pi}{8}+\cos^4\frac{3\pi}{8}+\cos^4\frac{7\pi}{8}=\frac{3}{2}$

3- Sachant que $\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$,donner la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $tg\frac{\pi}{24}$

4- Montrer que $tg^2\frac{\pi}{12}+tg^2\frac{5\pi}{12}=14$

Trigonométrie

Exercice N°7

1- Exprimer à l'aide de sin2x et cos2x
   A= $\cos^2x-2\sin x\cos x-5\sin^2x$

2- Montrer que pour tout x réel tel que $\sin x \neq -1$ on a : $\frac{1-\sin x}{1+\sin x}=tg^2(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2})$

Exercice N°8

1- Calculer $A=\sin\frac{\pi}{12}\sin\frac{7x}{12}$;$B=\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$

2- Montrer les égalités suivantes

   a) $4\sin x\sin(x+\frac{\pi}{3})\sin(x+\frac{2\pi}{3})=\sin 3x$

   b) $\frac{\cos 2x-\cos 4x}{\cos 2x+\cos 4x}=tg3xtgx$

Exercice N°9

Soient $S=\cos(\frac{2\pi}{5})+\cos(\frac{4\pi}{5})$ et $S'=\cos(\frac{3\pi}{5})\cos(\frac{\pi}{5})$

1- Calculer $2S\sin(\frac{\pi}{5})$ en déduire les valeurs de S et S'

2- Montrer que $\cos(\frac{2\pi}{5})\cos(\frac{4\pi}{5})=-\frac{1}{4}$ déduire la valeur de $\cos(\frac{2\pi}{5})$

Exercice N°10

1- Soient $P_1=\cos(\frac{\pi}{5})\cos(\frac{2\pi}{5})$ et $Q_1=\sin(\frac{\pi}{5})\sin(\frac{2\pi}{5})$

   Calculer P_1Q_1 et en déduire la valeur de P_1

2- Soient $P_2=\cos(\frac{\pi}{7})\cos(\frac{2\pi}{7})\cos(\frac{3\pi}{7})$ et $Q_2=\sin(\frac{\pi}{7})\sin(\frac{2\pi}{7})\sin(\frac{3\pi}{7})$

   Calculer P_2Q_2 en déduire la valeur de P_2

Exercice N°11

1- Montrer que pour $a\in IR-\{k\frac{\pi}{2},k\in Z\}$ on a : $\frac{1}{\sin 2a}=\cot ga-\cot g2a$

2- En déduire la valeur de la somme

   $S_n=\frac{1}{\sin a}+\frac{1}{\sin 2a}+\frac{1}{\sin 4a}+\cdots\cdots+\frac{1}{\sin 2^n a}$

Exercice N°12

Pour n dans IN et a et h deux réels tel que $h\neq 2k\pi$, $k\in Z$ on pose
S= cosa+cos(a+h)+cos(a+2h)+……….+cos(a+nh)
S'=sina+sin(a+h)+sin(a+2h)+…………..+sin(a+nh)

1- Former le produit $2S.\sin\frac{h}{2}$.Décomposer en somme les produit du second membre simplifier et déduire la valeur de S

2- Former le produit $2S'.\sin\frac{h}{2}$.Décomposer en somme les produit du second membre simplifier et déduire la valeur de S'

Exercice N°13

Pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ On donne $\sin x=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

1- Calculer cos2x

2- Vérifier que cos4x=sinx, En déduire x

Trigonométrie

Exercice N°14

1- Montrer que pour tout réel $x \neq \frac{k\pi}{2}$ on a : $\text{cotg}x = \frac{1+\cos 2x}{\sin 2x}$

2- En déduire la valeur de $\text{cotg}\frac{5\pi}{12}$

3- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin 3x - 2\sin 4x + \sin 5x}{\cos 3x - 2\cos 4x + \cos 5x}$

   a) Déterminer le domaine de définition de f
   b) Simplifier le domaine de définition de f(x)
   c) Résoudre dans IR puis dans $[-\pi,\pi]$ l'équation $f(x)=2+\sqrt{3}$

4- Résoudre dans IR l'équation : $(2+\sqrt{3})\sin x - \cos x = 1$

Exercice N°15

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1+2\cos 2x}{\sqrt{3}-2\sin x}$

1- Trouver le domaine de définition de f
2- Résoudre dans IR puis dans $[-\pi,\pi]$ l'équation f(x)=0
3- a) Montrer que pour tout x dans Df on a : $f(x)=\sqrt{3}+2\sin x$
   b) Déduire l'ensemble des solution de l'équation : $f(x)=2\sqrt{3}$
   c) Déduire les réels de Df vérifiant $f(x)=f(\frac{\pi}{3}+x)$

Exercice N°16

1- Montrer que pour $x \neq (2k+1)\pi, k \in \mathbf{Z}$; on a : $\text{tg}\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

2- En déduire que $\text{tg}\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1$

3- a) Transformer en produit l'expression : cosx +cos3x
   b) Résoudre dans IR l'équation : cosx+2cos2x+cos3x=0
   c) Construire les points images des solutions sur le cercle trigonométrique

4- On pose $f(x) = \frac{\sin x + 2\sin 2x + \sin 3x}{\cos x + 2\cos 2x + \cos 3x}$

   a) Déterminer le domaine de définition de f
   b) Montrer que pour tout x dans Df on a : f(x)=tg2x
   c) Résoudre dans IR, $f(x)=\sqrt{2}-1$

Exercice N°17

1- a) Vérifier que pour tout x réel on a : $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 2\cos(2x+\frac{\pi}{6})$
   b) Résoudre dans IR puis dans $[0,2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3} = 0$
   c) Placer les points images des solutions sur le cercle trigonométrique

2- On pose $f(x) = \sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x + \sqrt{3}$

   a) Montrer que $f(x) = 4\cos x\cos(x+\frac{\pi}{6})$
   b) Résoudre dans IR l'équation f(x)=0

Exercice N°18

1- Montrer que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et que $\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

2- Résoudre alors dans IR l'équation : $(\sqrt{3}+1)\cos x + (\sqrt{3}-1)\sin x = 2$

Exercice N°19

1- Montrer que pour tout x réel ona : $2\cos^2(x-\frac{\pi}{4}) - 2\sin x\cos x = 1$

2- a) Transformer sous la forme $r\cos(x-\theta)$: l'expression $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x$
   b) Résoudre alors dans IR puis dans $[-\pi,\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos 2x - \sin 2x = 1$

3- Soit $f(x)=\sqrt{3}-2[\cos^2(x-\frac{\pi}{4})+\sqrt{3}\sin^2 x]$

a) Montrer que $f(\frac{\pi}{2}+x)+f(x)=-2$

b) Montrer que pour tout réel x on a :$f(x)=-\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x-1$

c) En déduire que $f(x)=1-4\sin^2(x+\frac{\pi}{12})$

Exercice N°20

Soient les fonctions $f(x)=\dfrac{-1+2\cos 2x}{1+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x}$ et $g(x)=\dfrac{1+\sqrt{3}\operatorname{tg}x}{2}$

1- a) Mettre $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x$ sous la forme $r\cos(2x-\theta)$

b) Résoudre dans IR puis dans $[-\pi,\pi]$ l'équation :$1+\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x=0$

2- Déterminer chacun des deux domaines de définition de f et g notés Df et Dg

3- a) Montrer que pour tout x dans Df on a : $f(x)=\dfrac{\cos^2 x-3\sin^2 x}{2\cos x(\cos x-\sqrt{3}\sin x)}$

b) En déduire que pour tout x dans Df on a : f(x)=g(x) puis déduire la valeur de $\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}$

4- Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'inéquation : $g(x)\leq 0$

Exercice N°21

1- On pose pour tout x réel , $f(x)=1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x$

a) Montrer que :$2\sin(x+\frac{\pi}{6})=\cos x+\sqrt{3}\sin x$

b) En déduire que $f(x)=4\cos x.\sin(x+\frac{\pi}{6})$,puis déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{12}$

c) Résoudre dans IR puis dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ l'équation f(x)=0

2- Soit $g:\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\to IR$;$x\mapsto\dfrac{1+\cos 2x}{1+\cos 2x+\sqrt{3}\sin 2x}$;On pose $E=\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[-\{-\frac{\pi}{6}\}$

a) Montrer que pour tout x dans E ,$g(x)=\dfrac{\cos x}{2\sin(x+\frac{\pi}{6})}$ .En déduire que $\operatorname{cotg}\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}$ (On pourra exprimer de deux manières $g(-\frac{\pi}{12})$)

b) Résoudre dans IR l'équation : $(2+\sqrt{3})\cos x+\sin x=0$

c) Résoudre dans IR l'inéquation : $(2+\sqrt{3})\cos x+\sin x>0$