Exercice N° 1 :

Soit un triangle ABC du plan P , A' , B' , C' les images des points A , B et C par les projections orthogonales sur (BC), (AC) et (AB). H est l'orthocentre du triangle ABC.

1) Comparer les réels $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HB}$; $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HC}$ et $\overrightarrow{HB}\cdot\overrightarrow{HC}$

2) Montrer les égalités suivantes :

$$\overline{HA}\times\overline{HA'} = \overline{HB}\times\overline{HB'} = \overline{HC}\times\overline{HC'}$$

Exercice N° 2 :

Soit ABCD un parallélogramme et M un point du plan.

1) Montrer l'égalité $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AC}$

2) Soient B' , C' et D' les images respectives de M par les projections orthogonales sur (AB), (AC) et (AD). Montrer l'égalité $\overline{AB}\cdot\overline{AB'} + \overline{AD}\cdot\overline{AD'} = \overline{AC}\cdot\overline{AC'}$

3) Déterminer et construire l'ensemble des points M de P tels que $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$

Exercice N° 3 :

Soit $R = \left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ un RON du plan P. On considère les vecteurs $\vec{u} = (\sin\alpha)\vec{i} + (1+\cos\alpha)\vec{j}$ et

$\vec{v} = (1+\cos\alpha)\,\vec{i} - (\sin\alpha)\vec{j}$ où $\alpha \in [\,0\,;2\pi\,]$

1) Calculer $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ en fonction de α

2) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont-ils orthogonaux ?

3) Déterminer les réels α pour que $(\vec{u}, \vec{v})$ soit une base orthonormée de P. Écrire les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ correspondants.

Exercice N° 4 :

Soient A, B et C trois points non alignés.
Quel est l'ensemble des points M tels que :

1) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$

2) $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 0$

3) $MA^2 - MB^2 = 4a^2$ tel que $AB = 2a$

Exercice N° 5 :

Soient A et B deux points donnés du plan P et I le point défini par $\overrightarrow{AI} + 2\,\overrightarrow{BI} = \vec{0}$; et C un point de la perpendiculaire à la droite (AB) en I.
On donne AB = 3 et IC = 2.

1) Construire les points A, B, I et C

2) Montrer que $CA^2 + 2CB^2 = 18$

3) Montrer que $\forall\, M \in P$

$$MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 18 + 6\,\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{CI}$$

4) On considère Δ l'ensemble des points M de P tels que $MA^2 + 2MB^2 - 3MC^2 = 42$

a/ Montrer que Δ est une droite dont on précisera la direction.

b/ Montrer que Δ est tangente au cercle (C) de centre C et passant par I.

Exercice N° 6 :

Soit P un plan ; A et B deux points distincts de ce plan.

1) Construire le point G tel que $\overrightarrow{GA} + 2\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ et exprimer pour tout M de P le vecteur $\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}$ à l'aide de $\overrightarrow{MG}$

2) Quel est l'ensemble (Δ) des points M du plan tels que : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\,\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{BA}$

3) On suppose que $AB = 3x$ où $x > 0$

a/ Exprimer $MA^2 + 2\,MB^2$ à l'aide de MG^2 et x

b/ En déduire suivant les réels k l'ensemble (C_k) des point M de P tels que $MA^2 + 2\,MB^2 = k$

Exercice N° 7 :

Dans le plan P on considère un triangle équilatéral ABC de côté de longueur $a > 0$; $I = B*C$

1) Soit G le point défini par $2\,\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$
Montrer que $G = A*I$

2) Calculer en fonction de a , GA^2 , GB^2 et GC^2

3) Déterminer l'ensemble (C) des point M de P tels que $2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2$

4) Soit $J = A*G$

a/ Montrer que $\forall\, M \in P$,

$$2MA^2 + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 4\,(MJ^2 - JA^2)$$

b/ Déterminer et construire l'ensemble E défini par

$$E = \left\{M \in P \,/\, 2MA^2 + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MC} = 3a^2\right\}$$

Exercice N° 8 :

Soit (C) le cercle circonscrit à un triangle ABC, D le point diamétralement opposé à A et I le milieu du segment [BC].

1) Montrer que $2\,\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

2) Montrer que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = AB^2$ et que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} = AC^2$

3) En déduire que $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI} = \dfrac{AB^2 + AC^2}{2} = AI^2 + BI^2$

4) On suppose dans cette question seulement que $AB = 5x$; $AC = 2\sqrt{3}\,x$ où $x > 0$ et $B\hat{A}C = 30°$
Calculer BC, calculer ensuite la longueur de la médiane AI.

Exercice N° 9 :

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AB = 2a\sqrt{3}$; $AC = 2a$; $a > 0$

1) a/ Montrer que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} = -12a^2$

b/ Déduire $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}}\right)$ puis déterminer une détermination dans l'intervalle $[\,\pi\ ,\ 2\pi\,]$ de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}\,;\,\overrightarrow{BC}}\right)$

2) Soit (Γ) le cercle de diamètre [AC], la droite (BC) coupe (Γ) en D. Montrer que $\overline{BD}\times\overline{BC} = BA^2$

3) Soit M un point variable sur le cercle (Γ) et N un point de P tel que $2\,\overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \vec{0}$. Déterminer et construire l'ensemble (Γ') des points N quand M décrit le cercle (Γ)