Produit scalaire

1 Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points $F(4,1)$ $N\left(0, \frac{1}{4}\right)$ et la droite $\Delta : y = -\frac{1}{4}$

1/ a) Déterminer et construire l'ensemble I des points M équidistants du point N et de Δ.

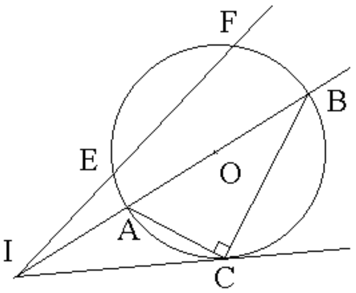
b) Déterminer l'ensemble :

$$E = \left\{ M(x, y) \in P ; \overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MO} = x^4 - 4x \right\}$$

c) En déduire $G = E \cap I$

2/ Soit H le projeté orthogonal de M sur Δ. Existe-t-il un point M de G tel que le triangle MNH est équilatéral ?

2 On considère un cercle Γ de centre O et de diamètre [AB]. Soit C un point de Γ distinct de A et de B et n'appartenant pas à la médiatrice de [AB]. La tangente à Γ en C rencontre (AB) en I. (voir figure)



Le but de l'exercice est de démontrer l'égalité $\overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$

1/ Démontrer que $\overline{IA} \cdot \overline{IB} = IC^2$

2/ Soit Δ une droite qui passe par I et qui coupe Γ en deux points distincts E et F.

a) Montrer que $\overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AF} \cdot \overrightarrow{FE}$ puis l'utiliser pour montrer que $\overrightarrow{EF} \perp \left(\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AF}\right)$. En déduire $\overrightarrow{IF} \perp \left(\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{AE}\right)$

b) Démontrer les égalités $\overline{IA} \cdot \overline{BF} = \overline{IF} \cdot \overline{BF}$, $\overline{AE} \cdot \overline{IB} = \overline{AE} \cdot \overline{IE}$ et $\overline{AE} \cdot \overline{BF} = \overline{AE} \cdot \overline{EF}$

c) Déduire alors l'égalité $\overline{IE} \cdot \overline{IF} = \overline{IA} \cdot \overline{IB}$

3 Soit Γ un cercle de centre O et de rayon r = 1, et ABCD un rectangle de sens indirect inscrit dans Γ.

On désigne par Δ la tangente à Γ en B et par E le point d'intersection de Δ avec (AC) et on pose $\theta = B\hat{O}A$. (avec $\theta \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$)

1/ Démontrer l'égalité $AD^2 - AB^2 = 4\cos\theta$

2/ Exprimer AB et EB en fonction de θ. Déduire la valeur de θ pour laquelle $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BE} = \cos\theta$

3/ Pour la valeur de θ trouvée, calculer de trois manières la distance AE. (On pourra utiliser la formule de l'exercice N°2 question 1/)

4 Sur le cercle trigonométrique, on considère les points M_n tels que $\left(\vec{i} ; \overrightarrow{OM_n}\right) \equiv \alpha_n [2\pi]$ $\alpha_n \in \left]0 ; \frac{\pi}{2}\right[$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $2\left(\vec{i} \cdot \overrightarrow{OM_{n+1}}\right)^2 = 1 + \vec{i} \cdot \overrightarrow{OM_n}$

1/ Exprimer α_{n+1} en fonction de α_n. En déduire $\vec{i} \cdot \overrightarrow{OM_n}$ en fonction de α_0 et de n.

2/ Déterminer $\vec{i} \cdot \overrightarrow{M_n M_{n+1}}$ en fonction de α_0 et de n et en déduire $\vec{i} \cdot \overrightarrow{M_0 M_{n+1}}$ en fonction de α_0 et de n.

3/ Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{i} \cdot \overrightarrow{M_0 M_{n+1}}$

5 Le plan P étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}$ avec $(a, b) \neq (0, 0)$ et $(a', b') \neq (0, 0)$

1/ Montrer que $\cos\left(\widehat{\vec{u} ; \vec{v}}\right) = \dfrac{aa' + bb'}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

2/ Soit $\vec{W} = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\vec{i} + \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\vec{j}$

a) Calculer $\|\vec{W}\|$

b) On pose $\alpha \equiv \left(\widehat{\vec{i} ; \vec{W}}\right)[2\pi]$. Calculer $\cos 2\alpha$, puis en déduire la mesure principale de l'angle α.

6 On munit le plan P d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, et on considère les points $A(1, 3)$, $I(0, -1)$ et le cercle $\mathscr{C} : 2(x-1)^2 + 2(y-3)^2 = 9$.

1/ Montrer qu'il existe deux droites D_1 et D_2 tangentes à $\mathscr{C}$ et passant par I. Déterminer leurs équations.

2/ a) Quelles conditions nécessaires et suffisantes faut-il satisfaire pour avoir des cercles tangents à D_1 et D_2 en même temps ? Déterminer alors, analytiquement, l'ensemble que décrivent les centres de ces cercles.

b) Quelle remarque peut-on faire ? Interpréter cette remarque géométriquement.

7 $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan. Montrer qu'il n'existe qu'un seul point fixe équidistant de tous les points M qui vérifient : $OM = \cos\left(\vec{i} ; \overrightarrow{OM}\right)$

La recette de ces exercices délicieux a été proposée par Walid Ben Romdhane. Si, après de longs efforts, vous n'arrivez pas à déguster quelques questions, contactez moi pour avoir la correction : walid_brd@voila.fr