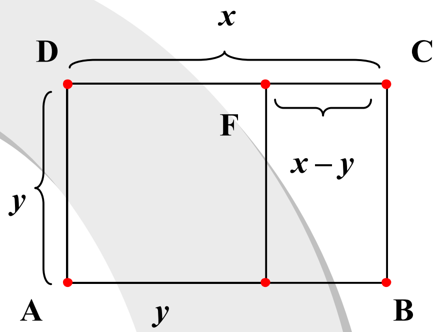
# Le nombre d'Or

**1** Géométriquement, le nombre d'or, noté φ (phi), est défini comme le quotient $\varphi = \frac{x}{y}$ des longueurs des côtés d'un rectangle ABCD tel qu'en enlevant le carré ADFE, le rectangle EBCF reste semblable à ABCD, c'est-à- dire $\frac{x}{y} = \frac{y}{x-y}$ ( $x$ désigne le grand côté et $y$ le petit )




**1°)** Calculez φ

**2°)** Montrez que le nombre d'or est le seul nombre réel positif qui, augmenté de un, est égal à son carré.

**3°)** Montrez que le nombre d'or est le seul nombre réel positif qui est égal à son inverse augmenté de un.

---

**2** Fibonacci, un mathématicien italien du moyen âge, a découvert une suite qui porte son nom. Cette suite se construit d'une façon très simple : chacun de ces termes est égal à la somme des deux précédents, ce qui donne : 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233 etc. Or le nombre d'or est intimement lié à la suite de Fibonacci. Démonstration :

**1°)** La suite de Fibonacci est la suite $(U_n)$ définie sur IN par $U_0 = 1$, $U_1 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ pour $n \geq 1$

**a/** On sait que $\varphi^2 = \varphi + 1$ (Résultat de l'exercice 1). Calculez $\varphi^3$ , $\varphi^4$ , $\varphi^5$ et $\varphi^6$. Remarquez-vous que l'on a $\varphi^{n+1} = \varphi\, U_n + U_{n-1}$ ? Démontrez par récurrence que cette relation est vraie pour $n \geq 1$.

**b/** On appelle $S_n$ la somme des (n +1) premiers termes de la suite $(U_n)$. Pour des valeurs impaires de l'entier n, utilisez la relation $U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$ pour montrer que $S_n = U_2 + U_4 + U_6 + U_8 + .... + U_{n+1}$ puis que $S_n = U_0 + U_3 + U_5 + U_7 +....+ 2U_n$. Ensuite, à partir des deux relations établissez que $S_n = U_{n+2} - 1$. Démontrez ce résultat par récurrence.

**c/** Démontrez de deux manières que $\sum_{k=1}^{n+1} \varphi^k = \varphi^{n+3} - \varphi^2$ (Utilisez les résultats des questions a/ et b/ )

**2°)** Dans cette question on va traiter les puissances négatives de φ, c'est-à-dire la suite $\varphi^{-1}$ , $\varphi^{-2}$ , $\varphi^{-3}$,...., $\varphi^{-n}$ où n est un entier naturel, et on va chercher les liens qui existent entre cette suite et celle de Fibonacci.

On va donc considérer la suite $(T_n)$ définie sur IN* par $T_n = \frac{1}{\varphi^n}$

**a/** On sait que $T_1 = \varphi^{-1} = \varphi - 1$ (Résultat de l'exercice 1). Après avoir vérifié que $T_n = (\varphi - 1)^n$ et que $T_{n+1} = (\varphi - 1)\, T_n$ $(\forall n \in \text{IN}^*)$, écrivez $T_2$, $T_3$ , $T_4$, $T_5$ et $T_6$ sous la forme $a_i\, \varphi + b_i$ $(i \in \text{IN} / 2 \leq i \leq 6)$. Que remarquez-vous à propos des suites $(a_i)$ et $(b_i)$ . Déterminez alors $a_n$ et $b_n$ pour que l'on ait $\forall n \in \text{IN}^*$ : $T_n = \varphi .a_n + b_n$ (Utilisez le raisonnement par récurrence)

**b/** Montrez sans utiliser le raisonnement par récurrence que $T_n \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$. Déduisez que $\sum_{k=0}^{n} T_k \leq 3 - \frac{1}{3^n}$

**3°)** On se propose maintenant de calculer $U_n$ en fonction de n. Pour cela, on définit une suite $(V_n)$ telle que $V_n = U_{n+1} + \alpha\, U_n$ pour tout entier naturel non nul n.

**a/** Montrez qu'il existe deux valeurs du réel α pour lesquelles la suite $(V_n)$ est géométrique, et précisez pour chaque valeur de α la raison de la suite.

**b/** Pour tout $n \in \text{IN}^*$ on pose $X_n = U_{n+1} + \alpha' U_n$ et $Y_n = U_{n+1} + \alpha'' U_n$ où $\alpha'$ et $\alpha''$ sont les deux valeurs de α trouvées dans 3°) a/ . Exprimez $X_n$ et $Y_n$ en fonction de n, déduisez $U_n$ en fonction de n.

**4°)** Considérons la suite $(W_n)$ où chaque terme est obtenu en ajoutant 1 à l'inverse du terme précédent, le premier terme de cette suite étant $W_1 = 1$

**a/** Sans faire aucun calcul, comment pouvez-vous écrire $W_2$ ,$W_3$, $W_4$ ,et $W_5$ ?

**b/** Montrez que pour un entier non nul n on a $W_n = 1+\left.\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\cdots\cdots}{\cfrac{\cdots\cdots}{1+\cfrac{1}{1}}}}}\right\}$ (n – 1) traits de fractions

**c/** Vérifiez que pour $n \in IN$ , $W_n = \dfrac{U_n}{U_{n-1}}$. Déduisez une expression de $W_n$ en fonction de n.

**d/** Utilisez les résultats précédents et montrez que $\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} 1+\left.\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{\cdots\cdots}{\cfrac{\cdots\cdots}{1+\cfrac{1}{1}}}}}\right\}$ n traits de fractions

**5°)** Pour terminer, nous allons considérer la suite $(A_n)$ définie sur IN* par $A_1 = 1$ et $A_{n+1} = \sqrt{1+A_n}$

**a/** Trouvez le plus grand réel p et le plus petit réel k qui vérifient : $\forall n \in IN^*,\ p \leq A_n \leq k$

**b/** Démontrez que $\forall n \in IN^* : A_{n+1} \geq A_n$. Pour quelle valeur de $A_1$ la suite $(A_n)$ aurait-t-elle été constante ?

**c/** Donnez une écriture de $A_1$, $A_2$, $A_3$ et $A_4$

**d/** Montrez que $\forall n \in IN^*,\ A_n = \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+1}}}}}_{n \text{ fois le symbole } \sqrt{\ }}$

**e/** On pose $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. En justifiant $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = \lim\limits_{n\to+\infty} A_{n+1}$, montrez que $\varphi = \lim\limits_{n\to+\infty} \underbrace{\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots+\sqrt{1+1}}}}}_{n \text{ fois le symbole } \sqrt{\ }}$

(vérifier ce résultat en utilisant une calculatrice)

---

**3** On considère le polynôme $P(x) = 8x^3 + 8x^2 - 1$

**1°)** Calculez $P\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ et déduisez une factorisation de $P(x)$

**2°) a/** Après avoir vérifié que $\sin\dfrac{\pi}{10} = \cos\dfrac{4\pi}{10}$ , montrez que $\sin\dfrac{\pi}{10} = \dfrac{\varphi - 1}{2} = \dfrac{1}{2\varphi}$

**b/** Calculez alors les valeurs de $\cot g\dfrac{\pi}{10}$ , $\cos\dfrac{\pi}{10}$ , $\cos\dfrac{\pi}{5}$ , $tg\dfrac{\pi}{5}$ , $\sin\dfrac{\pi}{5}$ $\cos\dfrac{\pi}{20}$, $\sin\dfrac{\pi}{20}$

**c/** Déduisez l'ensemble de solutions de chacune des équations suivantes :

$2\sin\pi x + 1 = 2\cos 2\pi x$ ; $\sin\pi x \,.\, \cos 2\pi x = \dfrac{1}{4}$

**3°) a/** En utilisant ce qui précède, construisez un pentagone régulier inscrit dans un cercle de rayon r = 1.

**b/** Quelle est la longueur d'un côté de ce pentagone ?

**4°) a/** Montrez qu'il n'existe qu'un seul réel θ de l'intervalle $[\,0\,;\,\frac{\pi}{2}\,[$ qui vérifie $\cos\theta = tg\,\theta$

**b/** Montrer que $\cos\theta = \sqrt{\sin\theta}$ , en déduire que $tg\,2\theta = \dfrac{2}{tg^3\theta}$

**c/** Établissez la relation $tg\,2\theta = 2\,(\,tg\,\theta + \cot g\,\theta\,)$ puis utilisez-la pour montrer que $\dfrac{1}{tg^6\theta} = \varphi^3$

---

La recette de ces exercices délicieux a été proposée par **Walid Ben Romdhane**. Si, après de longs efforts, vous n'arrivez pas à déguster quelques questions, contactez moi pour avoir la correction : walid_brd@voila.fr