Exercice N° 1 :

$U_0 = 0$ et $\forall n \in IN$ $U_{n+1} = \sqrt{a + U_n^2}$

1/ Calculer U_1 , U_2 , U_3 puis calculer U_n en fonction de n et de a.

2/ Calculer $S_n = U_1^2 + U_2^2 + ... + U_n^2$ en fonction de n et a.

Exercice N° 2 :

Soit la suite réelle $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $\begin{cases} U_0 \in IR_+^* \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{3 - 2U_n} \quad (n \in IN) \end{cases}$

1/ Montrer que (U) est constante pour une valeur de U_0 que l'on déterminera.

2/ On pose $V_n = \dfrac{U_n + a}{U_n}$ pour tout $n \in IN$. Déterminer le réel a non nul de telle sorte que la suite $(V_n)_{n\in IN}$ soit une suite géométrique. Déterminer la raison q.

Exercice N° 3 :

Soit $(U_n)_{n\in IN}$ la suite réelle définie sue IN par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \dfrac{5U_n + 6}{U_n + 4} \quad (n \in IN) \end{cases}$

1/ Montrer qu'il existe deux constantes a et b tels que

pour tout $n \in IN$ $U_{n+1} = a + \dfrac{b}{U_n + 4}$

2/ Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$: $-2 < U_n < 3$

3/ En déduire que pour tout $n \in IN$: $U_{n+1} - U_n > 0$

4/ Soit $(V_n)_{n\in IN}$ la suite réelle définie sur IN par $V_n = \dfrac{U_n - 3}{U_n + 2}$

a) Montrer que (V) est une suite géométrique b) Déterminer la limite de V_n en $+\infty$

c) Exprimer V_n en fonction de n. d) En déduire U_n en fonction de n.

e) Calculer $\sum_{k=0}^{n} V_{2k}$ f) Montrer que : pour tout $n \in IN$ $|U_n - 3| < 5\,|V_n|$

Exercice N° 4 :

On donne la suite (U) définie par : $U_0 = U_1 = 1$ et pour tout $n \in IN$ $U_{n+2} = -\frac{2}{3}U_n + \frac{\alpha}{9}U_n$

1/ On suppose que $\alpha = -1$

a) Démontrer que la suite (V) définie par $V_n = U_{n+1} + \frac{1}{3}U_n$, est une suite géométrique.

Calculer V_n en fonction de n.

b) Démontrer que la suite $W_n = (-3)^n\, U_n$ est une suite arithmétique de raison –4. Déduire que $U_n = (\frac{-1}{3})^n(1 - 4n)$

2/ On suppose que $\alpha = \frac{-3}{4}$

a) Montrer qu'il existe deux valeurs du réel α pour lesquelles la suite (t) telle que $t_n = U_{n+1} + \alpha\, U_n$ est une suite géométrique ; préciser pour chaque valeur de α la raison de la suite.

b) Montrer alors que $U_n = (-\frac{1}{2})^n \left[7 - 9 (-\frac{1}{3})^n \right]$; calculer la somme $S = \sum_{k=0}^{n} U_{2k}$

Exercice N° 5 :

On considère la suite (W) définie par $W_1 = -2$; $W_2 = 5$ et $W_n = \frac{1}{6}(W_{n-1} + W_{n-2})$ $(n \geq 3)$

On considère la suite (U) définie par $U_n = 2W_n - W_{n-1}$ pour $n \geq 2$

1/ Montrer que la suite (U) est géométrique. Exprimer U_n en fonction de n pour $n \geq 2$

2/ On considère la suite (V) définie par $V_{n+1} = W_{n+1} + \frac{1}{3}W_n$ pour $n \geq 1$; montrer que (V) est une suite géométrique. Exprimer V_n en fonction de n $(n \geq 2)$

3/ a) Déterminer l'expression de W_n en fonction de n pour $n \geq 1$

b) Déterminer $\lim W_n$ quand $n \to +\infty$ c) Calculer $\sum_{k=1}^{n} W_k$ en fonction de n.