Exercice 1 :

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 6$; et pour tout $n \in$ IN : $U_{n+1} = U_n + 2n + 1$

1) Soit la suite (V_n) définie sur IN par : $V_n = U_{n+1} - U_n$. Quelle est la nature de la suite (V_n) ?
2) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} V_k$ en fonction de n. En déduire U_n en fonction de n.

Exercice 2 :

Soit la suite (U_n) définie sur IN par : $U_0 = 0$; et pour tout $n \in$ IN : $U_{n+1} = \dfrac{3}{\sqrt{6 - U_n^2}}$

1) Monter que pour tout $n \in$ IN : $0 \le U_n < \sqrt{3}$
2) Monter que pour tout $n \in$ IN : $U_n < U_{n+1}$
3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \dfrac{U_n^2}{3 - U_n^2}$

 a/ Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 1.

 b/ Exprimer V_n en fonction de n et en déduire U_n en fonction de n.

Exercice 3 :

Soient (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies sur IN par $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = 2 \end{cases}$ et pour tout $n \in$ IN $\begin{cases} x_{n+1} = \frac{1}{4} y_n \\ y_{n+1} = \frac{3}{4} x_n + \frac{1}{2} y_n \end{cases}$

1) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = x_n + y_n$. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique, calculer V_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$
2) Montrer que pour tout $n \in$ IN : $x_n > 0$ et $y_n > 0$.
3) Soit la suite (U_n) définie sur IN par $U_n = \dfrac{x_n}{y_n}$. Montrer que $U_{n+1} = \dfrac{1}{3U_n + 2}$
4) Soit la suite (W_n) définie sur IN par $W_n = \dfrac{U_n - \frac{1}{3}}{U_n + 1}$. Montrer que la suite (W_n) est une suite géométrique, exprimer W_n en fonction de n et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} W_n$.
5) Exprimer U_n en fonction de n. Exprimer x_n et y_n en fonction des termes U_n et V_n

Exercice 4 :

On considère la suite suite (U_n) définie sur IN* par $U_1 = 6$; $U_2 = 2$ et $U_{n+1} = -\frac{1}{6} U_n + \frac{1}{6} U_{n-1}$

1) a/ Démontrer que la suite (V_n) définie sur IN*\{1} par $V_{n+1} = U_{n+1} + \frac{1}{2} U_n$ est une suite géométrique.

 b/ Démontrer que la suite (W_n) définie sur IN*\{1} par $W_{n+1} = U_{n+1} - \frac{1}{3} U_n$ est une suite géométrique.

3) a/ Calculer V_2 et W_2 puis exprimer V_{n+1} et W_{n+1} en fonction de n.

 b/ En déduire l'expression de U_n en fonction de n.

 c/ On pose pour $n \in$ IN* $S_n = U_1 + U_2 + \dots\dots + U_n$. Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 5 :

On considère la suite suite (U_n) définie sur IN* par $U_n = \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots\dots + \dfrac{1}{2n}$

1) Calculer U_1 ; U_2 ; U_3 et U_4
2) Calculer $U_{n+1} - U_n$
3) Montrer que pour tout $n \in$ IN* : $\dfrac{1}{2} \le U_n \le 1$
4) On pose pour tout $n \in$ IN* : $V_n = U_n + \dfrac{1}{2n}$. Montrer que pour tout $n \in$ IN* : $V_{n+1} < V_n$