Exercice N°1 :

(I) Soit la suite (U_n) définie sur IN* par $\sum_{k=1}^{n} U_k = \frac{-2n-4}{2^n} + 4$

1) Prouver que pour tout $n \in$ IN* : $U_n = \frac{n}{2^{n-1}}$

2) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in$ IN* : $U_n \leq 1$.

(II) Soit θ un réel de l'intervalle $]\frac{\pi}{3} ; \frac{\pi}{2}[$. On définit les suites (V_n) et (W_n) sur IN* par $V_1 = 1$ et

$V_{n+1} = \frac{n+1}{n} V_n \cos\theta$ et $W_n = \frac{V_n}{n}$.

1) a/ Montrer que (W_n) est une suite géométrique de raison $\cos\theta$.

b/ Déterminer les expressions de W_n et de V_n en fonction de $\cos\theta$ et de n - Calculer $\lim_{n\to+\infty} W_n$.

c/ Montrer que pour tout n de IN* $V_n \leq U_n$.

2) On pose pour $n \in$ IN*. $S_n = 1 + 2\cos\theta + 3\cos^2\theta + ... + n.\cos^{n-1}\theta$.

a/ Calculer $S_n(1-\cos\theta)$ et en déduire que $S_n = \frac{1-\cos^n\theta}{(1-\cos\theta)^2} - \frac{\cos\theta}{1-\cos\theta}.V_n$

b/ Déterminer alors $\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{n}$.

Exercice N°2 :

1) Montrer que $\cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.

2) Soit la suite $(U_n)_{n\in IN}$ définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$

a/ Calculer U_1 et U_2. Montrer que $\forall n \in$ IN , $0 < U_n < 2$

b/ En déduire que $\forall n \in$ IN , $U_{n+1} > U_n$

3) Soit $(V_n)_{n\in IN}$ telle que $\forall n \in$ IN $U_n = 2\cos V_n$, $V_n \in \left[0 , \frac{\pi}{2}\right]$

a/ Calculer V_0, V_1 et V_2 et vérifier que V_0, V_1 et V_2 sont en progression géométrique.

b/ Montrer que $\forall n \in$ IN $\cos(V_{n+1}) = \cos(\frac{1}{2}V_n)$. En déduire la nature de la suite (V_n)

c/ Exprimer V_n puis U_n en fonction de n. En déduire la valeur de $\cos\frac{\pi}{24}$

d/ On pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{3}{2\pi}V_n - \frac{1}{n}\right)$. Exprimer S_n en fonction de n. Calculer $\lim_{n\to+\infty} S_n$

Exercice N°3 :

1) Montrer que $\sin 2x.\sin 3x - \sin x.\sin 3x - \sin x.\sin 2x = 2\sin x.\sin\frac{x}{2}.\cos\frac{7x}{2}$

En déduire la valeur de $\sin\frac{2\pi}{7}.\sin\frac{4\pi}{7} - \sin\frac{6\pi}{7}.\sin\frac{3\pi}{7} - \sin\frac{\pi}{7}.\sin\frac{2\pi}{7}$

2) Montrer que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$. En déduire que $\left(\cos\frac{x}{3}\right)^3 = \frac{1}{4}\cos x + \frac{3}{4}\cos\frac{x}{3}$

3) On donne $S_4 = \cos^3\frac{x}{3} - 3\cos^3\frac{x}{3^2} + 3^2\cos^3\frac{x}{3^3} - 3^3\cos^3\frac{x}{3^4}$. Montrer que $S_4 = \frac{1}{4}\cos x - \frac{3^4}{4}\cos\frac{x}{3^4}$

4) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}3^{k-1}\cos^3\left(\frac{x}{3^k}\right)$. Montrer par récurrence que $S_n = \frac{1}{4}\cos x + (-1)^{n-1}\frac{3^n}{4}\cos\frac{x}{3^n}$