Suites réelles

EXERCICE N°1

Soit la suite (u_n) définie sur IN par : $u_n = \frac{3n+2}{n+4}$

1-Calculer $u_0, u_1, u_5, u_{21}, u_{98}$

2-Montrer que pour tout entier naturel n on a : $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 3$

EXERCICE N°2

On considère la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \ et \ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_{n+1} + u_n \end{cases}$

Calculer u_2 et u_7

EXERCICE N°3

On considère la suite définie par : $\begin{cases} u0 = 1 \\ un+1 = \frac{un}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1-Montrer par récurrence que pour tout entier naturelle on a :$0 < u_n \leq 1$

2-Montrer que pour tout entier naturelle n on a :$Un+1 \leq Un$

3-On pose $Vn = \frac{1}{Un}$

a-Calculer V_0 et V_1

b-Montrer que la suite V est arithmétique dont-on précisera son premier terme et sa raison

c-Donner Vn en fonction de n puis Un en fonction de n

d-Donner la valeur de $S = \sum_{k=1}^{10} v_k$

EXERCICE N°4

On considère la suite (Un) définie par : $\begin{cases} u0 = 1 \\ un+1 = \sqrt{un^2 + 2} \text{ pour tout } n \in IN \end{cases}$

1-Montrer que pour tout entier n on a : Un>0

2-Montrer que pour tout entier n on a : Un+1>Un

3-On pose $Vn = un^2$

a-Montrer que Vn est une suite arithmétique

b-Calculer Vn puis Un en fonction de n

c-Donner en fonction de n la valeur de $S = \sum_{k=1}^{n} v_k$

EXERCICE N°5

Soit (Un) une suite arithmétique de premier terme U_0 et de raison r

1-On donne $U_5=11$ et $U_8=41$ calculer U_0 et r

2-Sachant que r=-3,U1=6 et $\sum_{k=0}^{n} u_k = -90$ calculer n

EXERCICE N°6

1-Soit Un une suite arithmétique de raison r

a-Calculer U_3, U_7 et U_{80} connaissant $U_{50}=20$ et r=-2

b-Calculer U_{100} et r connaissant $S=U_0+U_1+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots+U_{100}=2513$ et $U_0=9$

2-On désigne par V une suite géométrique de raison q

a-Calculer V_3,V_6 et Vn Connaissant V8=768 et q=2

b-Calculer S= V0+V1+…………………………+Vn connaissant V0=2 et q=3

EXERCICE N°7

1-Soit $a\in$ IR-{0, $\frac{1}{2}$}, on pose A= $\frac{2a^2-a+1}{2a^2-a}$;B= $\frac{2a}{2a-1}$ et C= $\frac{a+1}{a}$ .Montrer que A,B et C sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique

2-Déterminer le réel x pour que (x+1),(x+7) et (x+31) soit dans cette ordre trois termes consécutifs d'une suite géométrique

EXERCICE N°8

Soit U la suite définie par : $\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\frac{1}{3}u_n+4 \text{ pour tout} n\in \text{IN} \end{cases}$

1-Calculer U_1,U_2 et U_3;La suite U est elle particulière ?

2-Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :$0\leq Un\leq 6$

3-On considère la suite V définie sur IN par Vn=Un+a

a-Déterminer a pour que V soit une suite géométrique

b-Exprimer Vn en fonction de n puis Un en fonction de n

c-Retrouver le résultat du 2-

4-Calcuer

a- $V_0+V_1+\dots\dots+V_n$ puis $U_0+U_1+\dots\dots\dots\dots+U_n$

b- $V_2+V_3+\dots\dots+V_{n+5}$ puis $U_2+U_3+\dots\dots\dots\dots+U_{n+5}$

EXERCICE N°9

Soient U et V les suites réelles définies sur IN par :

Un=2n-3+ π^n

Vn=2n-3- π^n

1-Montrer que U et V ne sont ni arithmétiques, ni géométrique

2-Soit W la suite définie sur IN par Wn=Un+Vn

Montrer que W est une suite arithmétique et calculer S= $\sum_{k=0}^{n} w_k$

3-Soit Z la suite définie par $Z_n=U_n-V_n$

a-Montrer que Z est une suite géométrique et calculer S'= $\sum_{k=0}^{n} z_k$

b-Déduire les valeurs de S_1= $\sum_{k=0}^{n} u_k$ et S_2= $\sum_{k=0}^{n} v_k$

EXERCICE N°10

On considaire la suite U définie surIN par Un= $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$

1-Montrer que pour tout entier naturel on a : $0\leq Un\leq 1$

2-Calculer en fonction de n ,$U_{n+1}-U_n$

3-On pose pour n >0,Vn=$U_1.U_2\dots\dots\dots.U_n$

a-Calculer V_1,V_2 et V_3

b- Montrer que Vn= $\frac{(n+2)}{2(n+1)}$ pour tout n non nul

EXERCICE N°11

Suites réelles

I-Soit U une suite géométrique de premier terme U_1 et de raison q tel que $\begin{cases} q<-1 \\ u_1+2u_2+u_3=8 \\ u_1u_2u_3=-216 \end{cases}$

1-Calculer U1 et q

2-Montrer que $Un=2.(-3)^{n-1}$

3-Déterminer n pour que $\sum_{k=1}^{n} u_k=122$

II- Soit V la suite définie sur IN*par : $\begin{cases} v_1=2 \\ v_{n+1}=\frac{3}{2}v_n+u_n \end{cases}, n\in IN^*$

1-Calculer V_2 et V_3

2-On pose pour tout non nul $Wn=\frac{v_n}{u_n}+\frac{2}{9}$

a-Montrer que W est une suite géométrique déterminer sa raison

b-Exprimer Wn en fonction de n

EXERCICE N°12

On considère la suite U définie par : $\begin{cases} u_0=0 \\ u_n=u_{n-1}+n(-1)^{n-1}, n\in IN^* \end{cases}$

1-Calculer U_1,U_2 et U_3

2-Montrer que $U_{n+2}=U_n-(-1)^n$

3-Considérons les suites suivantes $V_p=U_{2p-1}$ et $W_p=U_{2p}$,pour tout p non nul

a- Calculer V_1,V_2,V_3, W_1,W_2etW_3

b- Montrer que $W_{p+1}-W_p=-1$

c- Montrer que V_p+W_p est une suite constante ,en déduire que V est une suite arithmétique

EXERCICE N°13

Soit la suite u_n définie par $u_0\in[0,2]$ et $u_{n+1}=\frac{2+8u_n}{7+u_n}$

1- Montrer que si $u_0=2$ alors la suite u est constante
2- On suppose que $u_0\in[0,2[$
   a- Montrer que pour tout $n\in IN$ on a :$u_n\in[0,2[$
   b- Montrer que pour tout $n\in IN$ on a : $u_{n+1}>u_n$
3- Soit v la suite définie par : $v_n=\frac{-2+u_n}{1+u_n}$
   a- Montrer que v est une suite géométrique
   b- Exprimer v_n en fonction de n et u_0 , en déduire l'expression de u_n en fonction de n et u_0
   c- Donner $\lim_{n\to+\infty} v_n$, calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

EXERCICE N°14

On définie les deux suites u et v par $\begin{cases} u_0=1 ,\ v_0=2 \\ u_{n+1}=\frac{u_n+2v_n}{3} \text{ et } v_{n+1}=\frac{u_n+3v_n}{6} \end{cases}$ *pour tout* $n\in IN$

1- Calculer u_1,u_2,v_1 et v_2 ,en déduire que chacune des deux suites n'est arithmétique ni géométrique
2- Montrer par récurrence que $u_n\neq v_n$ pour tout $n\in IN$
3- On désigne par w et T les suites définies par $w_n=v_n-u_n$ et $Tn=u_n+4v_n$
   a- Montrer que w est une suite géométrique préciser sa limite éventuelle et exprimer son terme générale en fonction de n

Montrer que T est une suite constante et la définie

4- Utiliser ce qui précède pour exprimer u_n et v_n en fonction de n

5- Exprimer S= $\sum_{k=0}^{n-1} u_k$ en fonction de n

EXERCICE N°15

Soit la suite U définir sur IN par : $U_0=2$ et $U_{n+1}=3U_n-(n^2+n)$ pour tout n dans IN

1- Calculer U_1 et U_2 . En déduire que U est ni arithmétique ni géométrique

2- Soit la suite V définie par : $V_n=U_n-\frac{1}{2}n^2-n-\frac{3}{4}$

a- Montrer que la suite V est géométrique et préciser sa raison puis $\lim_{n\to+\infty} v_n$

b- Exprimer V_n puis U_n en fonction de n

3- a- Calculer la somme S= $\sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de n

b- Montrer par récurrence que pour out n entier naturel on a : $\sum_{k=0}^{n} k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c- En déduire la somme S'= $\sum_{k=0}^{n} u_k$ en fonction de n

EXERCICE N°16

Pour n dans IN on considère la suite U définie par : $\begin{cases} u_0 \; et \; u_1 \text{ sont deux réels données non nul} \\ \text{pour } n\in IN^* ; u_{n+1}=u_n+6u_{n-1} \end{cases}$

On considère la suite Vn définie sur IN*par :$V_n=U_n+2U_{n-1}$

1- Montrer que la suite V est géométrique de raison 3 . Donner V_n à l'aide de n et V_1

2- a- Montre que $\frac{u_1}{3}=\frac{v_1}{3}+(-\frac{2}{3})u_0$ et que $\frac{u_2}{3^2}=\frac{v_1}{3}[1+(-\frac{2}{3})^1]+(-\frac{2}{3})^2u_0$

b- Montrer alors par récurrence que pour tout n non nul on a : 0

$$\frac{u_n}{3^n}=\frac{v_1}{3}[1+(-\frac{2}{3})^1+(-\frac{2}{3})^2+........+(-\frac{2}{3})^{n-1}]+(-\frac{2}{3})^n u_0$$

c- En déduire une simple expression de Un en fonction de n,U_0 et U_1