Suites

1 Soient a et b deux reéls non nuls avec $b \neq a$.

1°/ Transformer en quotient la somme $\sum_{k=1}^{n} b^{k-1}.a^{n-k} = a^{n-1} + b.a^{n-2} + b^2.a^{n-3} + ... + b^{n-2}.a + b^{n-1}$

2°/ En déduire une factorisation de $x^n + y^n$ lorsque c'est possible.

2 **1°/** On remarque que $1 + 2 = 3$; $4 + 5 + 6 = 7 + 8$ et $9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15$.

Si n est un entier naturel donné, existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_{2n} rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = a_{n+1} + a_{n+2} + ...+ a_{2n}$$

2°/ On remarque que $3^2 + 4^2 = 5^2$; $10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2$ et $21^2 + 22^2 + 23^2 + 24^2 = 25^2 + 26^2 + 27^2$

Si n est un entier naturel donné, existe-t-il $2n + 1$ entiers naturels consécutifs a_0 , a_1 , a_2 , ... , a_{2n} rangés dans l'ordre croissant, vérifiant :

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2 = a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + ... + a_{2n}^2$$

3 Un carré parfait est le carré d'un nombre entier. Ainsi : 4, 81 et 529 sont des carrés parfaits car on a $4 = 2^2$, $81 = 9^2$ et $529 = 23^2$.

1°/ Montrer que le produit de quatre entiers naturels consécutifs augmenté de un est un carré parfait.

par exemple : $4\times5\times6\times7 + 1 = 29^2$ et $12\times13\times14\times15 + 1 = 181^2$

2°/ a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul $\underbrace{11111111.....1}_{n \text{ fois}} = \dfrac{10^n - 1}{9}$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $\underbrace{1111....1}_{n \text{ fois}}\underbrace{5555....5}_{n \text{ fois}} + 1$ est un carré parfait.

c) Écrire alors le nombre $X = \sqrt{11111111115555555556}$ sans le symbole $\sqrt{\ }$

4 Soit f la fonction définie sur IR par $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx$

1°/ a) Pour quels valeurs de a, b, c, et d a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x) = 6x^2$

b) Calculer alors la somme des n premiers carrés parfaits non nuls.

c) Démontrer par récurrence le résultat obtenu.

2°/ a) Pour quels valeurs de a, b, c, et d a-t-on : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x + 1) - f(x) = 4x^3$

b) Calculer alors la somme des n premiers cubes parfaits non nuls.

c) Démontrer par récurrence le résultat obtenu.

3°/ En déduire l'expression, en fonction de n, du terme général de la (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} - U_n = n^3 - n^2 \end{cases}$

N.B : On donne $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$

5 **1°/** Quel est le chiffre des unités de $1 + 9^{2000}$?

2°/ Quel est le dernier chiffre de l'écriture décimale de $\dfrac{1}{5^{2002}}$?

6 **1°/** Résoudre dans IN (E) : $2^{1994} + 4^{997} + 8^{665} = 16^n$; $(E_1) : 2^n(6 - n) = 8n$

2°/ Résoudre dans IN* : $\sum_{k=1}^{n} 2^{2k+1} = \dfrac{8}{3}\left(4^a - 1\right)$ avec $a = 2n^2 - n$