Exercice N° 1 :

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{2}x^2-x+1 & \text{si } 0<x<3 \\ f(x)=\frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x\le 0 \text{ ou } x\ge 3 \end{cases}$$

1) Montrer que f est dérivable en 0. Écrire une équation de la tangente Δ à C_f en A(0 , f (0)).
2) Pour x $\in$ [-1 , 1]. Étudier le signe de $[f(x)-(1-x)]$ et en déduire la position de C_f par rapport à Δ.
3) Étudier la dérivabilité de f en $x_0 = 3$ et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenues.
4) Construire les tangentes ou les demi-tangentes à C_f en A et en B (3 , f (3))

Exercice N° 2 :

Soit la fonction f définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x)=x^2+\alpha x+\beta & \text{si } x\le 2 \\ f(x)=2x-3 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

1) a) Établir une relation en α et β pour que f soit continue en 2.
   b) Montrer alors que f es dérivable à droite en 2 et à gauche en 2.
2) On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $\left(o;\vec{i};\vec{j}\right)$. Déterminer α et β dans chacun des cas suivants :
   a) f est dérivable en 2 ; écrire l'équation de la tangente en A (2 , f (2)) à C et la construire.
   b) C admet en A (2 , f (2)) deux demi-tangentes perpendiculaires, écrire leurs équations.

Exercice N° 3 :

Soit f une fonction dérivable en x_0.

Calculer $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{x f(x_0)-x_0 f(x)}{x-x_0}$

Application : calculer $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^3 a-a^3 x}{x-a}$

Exercice N° 4 :

Soit la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x^2\left|x-3\right|^3}$.

Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 3 et indiquer les conséquences graphiques des résultats obtenus.

Exercice N° 5 :

Soit la fonction f définie sur IR par

$$\begin{cases} f(x)=a-x & \text{si } x\le -1 \\ f(x)=\sqrt{1-x^2} & \text{si } -1<x<1 \\ f(x)=\frac{1}{x}+b & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$$

Trouver les réels a et b pour que f soit continue en –1 et en 1.

1) On prend a = b = –1
   a) Étudier la continuité de f sur IR.
   b) Étudier la dérivabilité de f en –1 et en 1 et interpréter graphiquement les résultat obtenus.
   c) Montrer que f est dérivable en tout $x_0\in\left]-1;1\right[$. Préciser f ‘ (x_0).
   d) Soit M $(x_0 ; y_0)$ avec $x_0\in\left]-1;1\right[$. Calculer x_0 pour que la courbe de f admette en M une tangente parallèle à la droite D : $y=-x+1$
3) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\sqrt{x^2+1}\right]$

Exercice N° 6 :

Soit la fonction f définie sur [-1 ; 1] par

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x\ne 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue sur [-1 ; 1].
2) Montrer que f est dérivable en 0.
3) La fonction f est-elle dérivable à gauche en 1 ? à droite en –1 ?

Exercice N° 7 :

Soit f une fonction dérivable en un point x_0 de IR.

1) Calculer en fonction de x_0 , f ‘ (x_0) et f (x_0) ;
$$\lim_{h\to 0}\frac{x_0\, f(x_0+h)-(x_0+h)\, f(x_0)}{h}$$
2) Montrer que la fonction g : $x\mapsto x^3$ est dérivable en tout réel a et calculer g‘(a).
3) En déduire $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{x_0\,(h+x_0)^3-(h+x_0)\,x^3}{h}$

Exercice N° 8 :

On pose $f(x)=\dfrac{x\left|x-2\right|}{(x-2)(\left|x\right|+1)}$ si $x\ne 2$ et $f(2)=\dfrac{2}{3}$

1) Déterminer le domaine de continuité de f.
2) Étudier la dérivabilité de f en 2 , en 0
3) A un point de C_f d'abscisse –1
   a/ Donner une équation cartésienne de T la tangente à C_f au poin A
   b/ Existe-t-il un point B de C_f où la tangente est parallèle à T ? (B d'abscisse un réel de] 0 ;2 [ )

Exercice N° 9 :

Soit f une fonction dérivable sur IR et n$\in\mathbb{Z}$

1) Montrer que $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+nh)-f(x)}{h}=n\,f'(x)$
2) Utiliser le résultat précédent pour démontrer que
$$\lim_{h\to 0}\frac{[f(x+2h)]^2-[f(x-h)]^2}{h}=6f(x)f'(x)$$