Série N 2

Produit scalaire

Exercice n1 :

On considère le triangle ABC tel que AB = a , AC = 3a (où a est un réel strictement positif)

et $B\hat{A}C = \frac{2\pi}{3}$, H le projeté orthogonale de C sur (AB) et le point O est le milieu de [BC]

1) Faire une figure
2)
   a) Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$
   b) En déduire AH et CB puis CH en fonction de a
3)
   a) Calculer $\overrightarrow{BA}\,.\,\overrightarrow{BC}$
   b) En déduire AO en fonction de a
4)
   a) Soit le point I est le milieu de [AO] ; montrer que pour tout point M de P on a :
   $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = 2\,(MI^2 - IA^2)$
   b) Déterminer l'ensemble des points M de p tel que $\overrightarrow{MA}.(\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}) = \frac{a^2}{4}$

Exercice n2 :

On considère ABC un triangle isocèle de sommet principal A tel que AB = $2\sqrt{2}$, $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$

et le point I est le milieu de [AB]

1) Calculer BC , CI , et $\overrightarrow{CA}\,.\overrightarrow{CB}$
2)
   a) Montrer que l'ensemble E des point M du plan M tel que $\overrightarrow{MA}\,.\overrightarrow{MB} = 12$ est un cercle de centre I dont on déterminera son rayon
   b) Vérifier que C est un point de E
3) Montrer que l'ensemble D des points M du plan P tels que $\overrightarrow{MA}^{\,2} - \overrightarrow{MB}^{\,2} = -12$ est une droite
4) Le plan P rapporté à un repère orthonormé (O ,$\vec{\imath}$,$\vec{\jmath}$) ; les points A(0,1) et B(2,3)
   a) Vérifier que AB = $2\sqrt{2}$
   b) Déterminer une équation cartésienne de D
   c) Vérifier que les droites D et (AB) sont perpendiculaire
   d) Calculer d (I,D) . en déduire la position relative de la droite D et le cercle E

Exercice n 3 :

Soit ABC un triangle rectangle en A . G son centre de gravité de I le milieu de [BC]

1) Montrer que $\overrightarrow{GB}\,.\,\overrightarrow{GC} = \frac{-2}{9}\,BC^2$
2) On considère l'application f : $P \longrightarrow \mathbb{R}$

$$M \longrightarrow \overrightarrow{MB}\,.\,\overrightarrow{MC} - \frac{2}{3}\,\overrightarrow{AI}\,.\,\overrightarrow{MG}$$

a) Calculer f(A) et f(G) en fonction de BC
b) Montrer que pour tout point M de P on a f(M) = MG ^{2} - $\frac{2}{9}$ BC ^{2}
c) En déduire l'ensemble (C) des points M de P vérifiant f(M) = - $\frac{1}{9}$ BC ^{2}

3) Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère les points A(1,1) , B(2 , - 1) et C(3 , 2)
   a) Vérifier que le triangle ABC rectangle
   b) Déterminer les coordonnées de G puis donner une équation de (C)

Exercice n4 :

Dans le plan P on considère un triangle rectangel et isocèle en A tel que AB = a , soit E un point de [AB] distinct de A et B et F∈ [AC] tel que AE = AF , on pose I = A * C et O = B * F

1) Calculer en fonction de a, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{IB}$
2)
   a) Montrer que (AO) et (CE) sont perpendiculaires
   b) Déterminer l'ensemble E_1 des points M de P tel que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}$
3) Soit $E_2 = \left\{M \in P \text{ tel que } MA^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} = \frac{3a^2}{4}\right\}$. Montrer que $MA^2 + \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$, déduire l'ensemble E_2
4) Soit G le barycentre de (A ,1) et (B,2) , on pose f(M) = MA ^{2} + 2 MB ^{2}
   a) Montrer que pour tout M de P , f(M) = 3MG ^{2} + GA ^{2} + 2GB ^{2}
   b) Déterminer l'ensemble E_3 des points M tel que f(M) = a ^{2}
5) Déterminer l'ensemble $\Delta = \left\{M \in P \text{ tel que } MB^2 + MF^2 - 2MA^2 = \frac{BF^2}{2}\right\}$

Exercice n5 :

Soit ABC un triangle tel que AB = 4 , AC = 6 et BC = 8 , on désigne par I le milieu de [AB] et J le milieu de [AC]

1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}$ (AB ^{2} + AC ^{2} – BC ^{2})
2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis déduire cos $\widehat{BAC}$
3) Soit H le projeté de B sur (AC) , calculer AH
4) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, en déduire BJ
5)
   a) Montrer que pour tout point M du plan on a MA ^{2} + MB^2 = 2MI ^{2} + 8
   b) Calculer CI
   c) Déterminer l'ensemble E = $\{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 100\}$
6) Montrer que pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC}$ = MJ ^{2} – 9
7) Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$. déduire l'ensemble E' = $\{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA} .\overrightarrow{MC} = 7\}$
8) Soit O le milieu de [IJ]
   a) Montrer que MI ^{2} – MJ ^{2} = $2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM}$
   b) Déterminer l'ensemble E '' = $\left\{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 - 2\,\overrightarrow{MA} .\overrightarrow{MC} = -6\right\}$