Exercice n°1 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=x(1-x)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que f est majorée par $\frac{1}{4}$ sur $\mathbb{R}$.

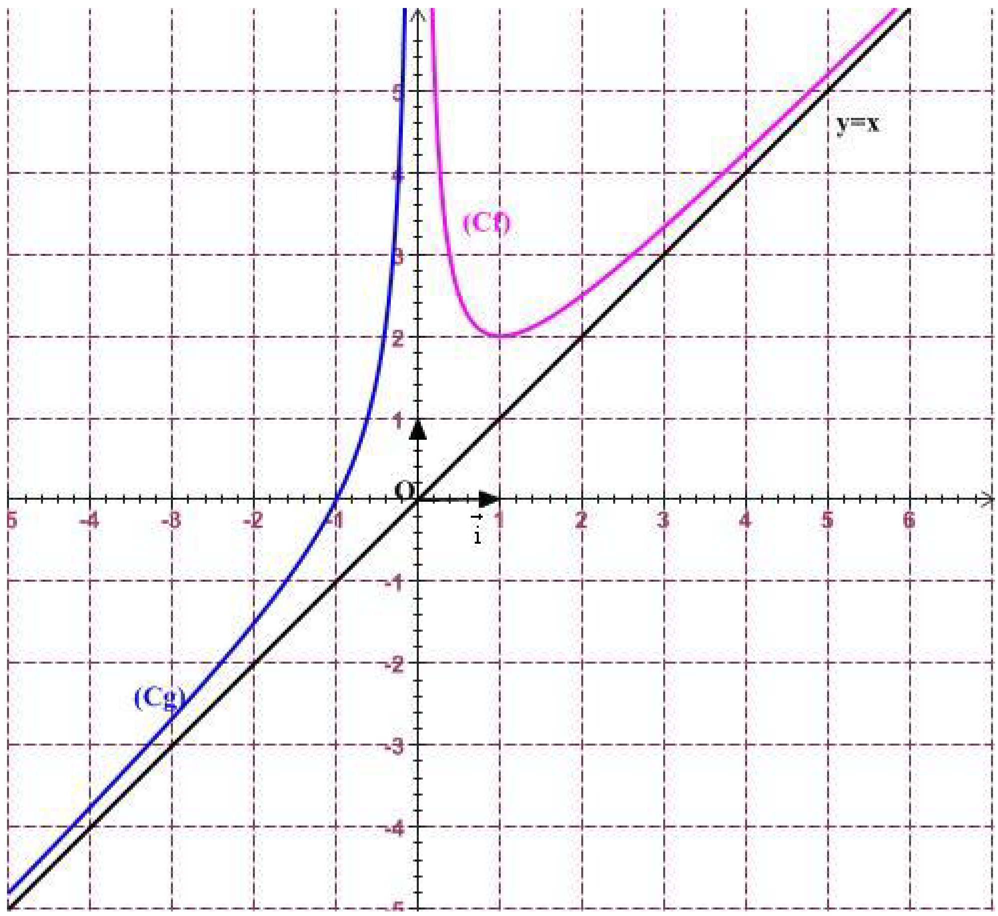
2. En déduire que la fonction f admet un maximum en $x=\frac{1}{2}$.

3. Démontrer que $f(x)=\frac{1}{4}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$; puis étudier ses variations sur $\mathbb{R}$.

Exercice n°2 : ©

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=x+\frac{1}{x}$. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

1. Etudier la parité de chacune des fonctions f et g.
2. Montrer que f est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$. Qu'en est il de g ?
3. Compléter les représentations graphiques de f et g dans le repère ci-dessous :



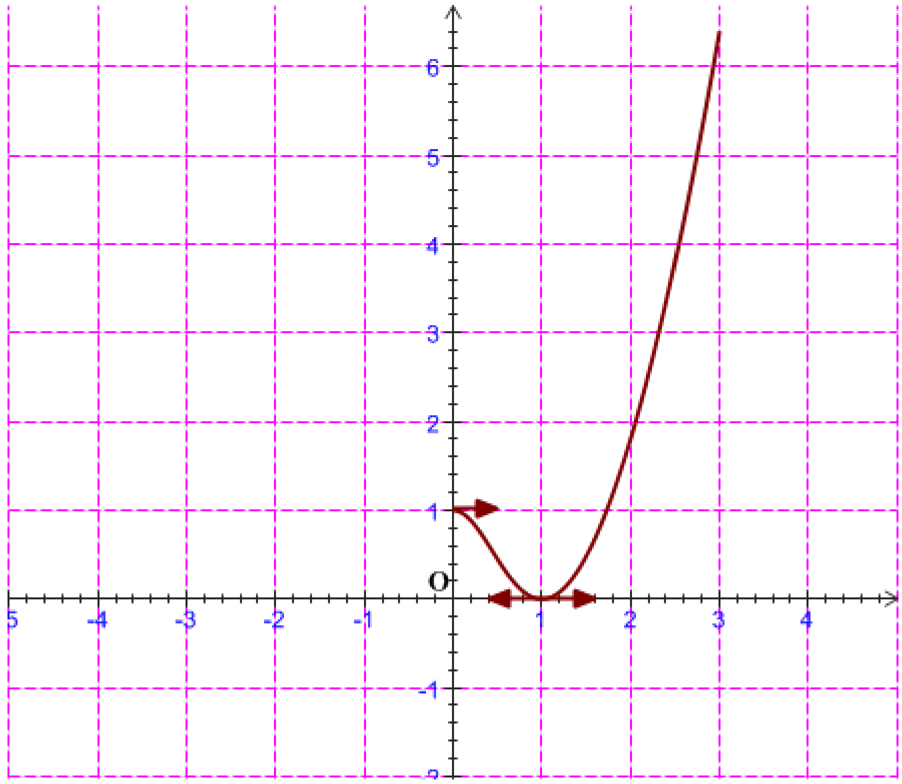
4. Préciser si f est majorée, minorée, bornée ou non sur chacun des intervalles suivants :

$\left[\frac{1}{2},3\right]$; $[1,+\infty[$ et $]0,1]$.

Exercice n°3 :

On considère la fonction f définie par $f(x)=\dfrac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$.

1. Déterminer son ensemble de définition.
2. Minorer f sur $\mathbb{R}$.
3. Etudier la parité de la fonction f.
4. Compléter la représentation graphique C_f de f sur l'intervalle $[-3,3]$.



5. Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :
   a) l'intervalle $[-1,1]$.
   b) l'intervalle $[-2,1]$.
6. Résoudre l'inéquation $f(x)\le 1$.

Exercice n°2 :

1. Parité de f : $f(x)=x+\frac{1}{x},\ x\in IR^*$

   Soit $x\in IR^*$, $-x\in IR^*$ et on a : $f(-x)=-x+\frac{1}{-x}=-x-\frac{1}{x}=-\left(x+\frac{1}{x}\right)=-f(x)$

   $\Rightarrow f$ est une fonction impaire.

   Parité de g : $g(x)=x-\frac{1}{x},\ x\in IR^*$

   Soit $x\in IR^*$, $-x\in IR^*$ et on a : $g(-x)=-x-\frac{1}{-x}=-x+\frac{1}{x}=-\left(x-\frac{1}{x}\right)=-g(x)$

   $\Rightarrow$ g est une fonction impaire.

2. Soient a et b deux réels non nuls tels que a < b.

   $f(b)-f(a)=b+\frac{1}{b}-a-\frac{1}{a}=b-a+\frac{a-b}{ab}=\underbrace{(b-a)}_{>0}\left(1-\frac{1}{ab}\right)$

   - Si a et b $\in[1,+\infty[$ alors $ab>1\Rightarrow\frac{1}{ab}<1\Rightarrow 1-\frac{1}{ab}>0\Rightarrow f(b)-f(a)>0$

     $\Rightarrow f(b)>f(a)\Rightarrow f$ est strictement croissante sur $[1,+\infty[$.

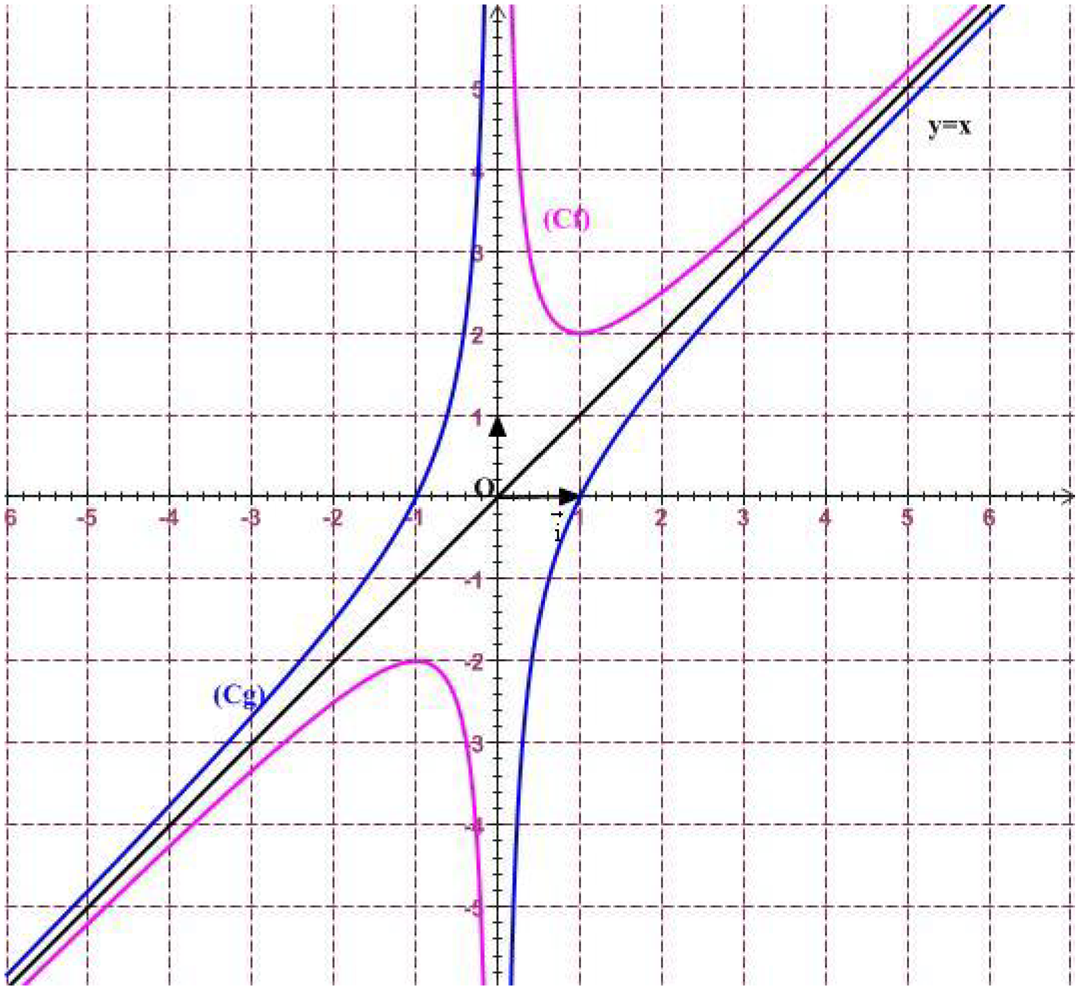
   - Si a et b $\in]0,1]$ alors $ab<1\Rightarrow\frac{1}{ab}>1\Rightarrow 1-\frac{1}{ab}<0\Rightarrow f(b)-f(a)<0$

     $\Rightarrow\Rightarrow f(b)<f(a)\Rightarrow f$ est strictement décroissante sur $]0,1]$.

   Pour la fonction g, le cas est beaucoup plus simple.

   En effet : $g(x)=x-\frac{1}{x}$ c'est la somme de deux fonctions croissantes sur IR* donc g est une fonction croissante sur IR*.

3. f et g sont deux fonctions impaires sur IR* donc leurs courbes sont symétriques par rapport à l'origine du repère.



4. $f\left(\left[\frac{1}{2},3\right]\right)=\left[2,\frac{10}{3}\right]$; $f\left([1,+\infty[\right)=[2,+\infty[$; $f\left(]0,1]\right)=[2,+\infty[$.